Complex Analysis

B.Sc. Mathematics Hons

Dr. Arnab Chakraborty

Assistant Professor
Indian Statistical Institute, Kolkata

Formerly

Guest Faculty
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur

◇

Guest Faculty
Ramakrishna Vivekananda University, Belur

◇

Assistant Professor
St. Xavier's College, Kolkata

Levant Publications
18-B, Shyamacharan De Street
Kolkata 700 073

সূচী

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

এসে গেল আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের দশম বই। যারা এই সিরিজের অন্য বইগুলো দেখেছো, তারা তো জানোই যে, এই সিরিজটা লেখা হচ্ছে সেইসব ছাত্রছাত্রীদের জন্য, যারা ইংরাজি মাধ্যমে পড়ছ, কিন্তু যাদের ইংরাজির চেয়ে বাংলাতে বুঝতেই বেশী সুবিধা হয়। এ বইতে যাবতীয় definition, theorem, ইত্যাদি ইংরাজিতে লেখা। খালি বোঝানো অংশগুলো বাংলায়। আগের বছরগুলোর বিভিন্ন প্রশ্নের বিশদ উত্তর আলোচনা করা হয়েছে। সমাধানের যে অংশটুকু তোমাকে লিখতে হবে, সেটা handwriting-এর মত হাতের লেখায় দেওয়া আছে, ফাঁকে ফাঁকে বাংলায় বোঝানো। ঠিক যেন ক্লাসে মাষ্টারমশাই পড়াচ্ছেন, হাতের লেখা অংশগুলো বোর্ডে লেখা হচ্ছে, আর বাংলাগুলো মুখে বলছেন।

পুরো বইটা Day 1, Day 2,... এইভাবে দিনে দিনে ভাগা রয়েছে। একেকটা দিনে আমরা একেকটা জিনিস শিখব। একটা day বলে যতটা দিয়েছি, সেটা কোচিং ক্লাসের দু ঘন্টার পড়া। একদিনে ওর চেয়ে বেশী পড়ার চেষ্টা করলে মাথা ঝিমঝিম করবে।

কিছুদিন যাবৎ CBCS সিলেবাস চালু হয়েছে। তাতে complex analysis-এর অংশটা আগেকার চেয়ে অনেকটাই বেশী। আগে খালি differentiation অব্ধি ছিল, এখন integration-ও ঢুকেছে। আর সেই সঙ্গে এসেছে Möbius transform. এই সবই এ বইয়ে আলোচিত হয়েছে।

এই সিরিজের অন্যান্য বইয়ের মত এই বইয়েরও একটা ওয়েবপেজ আছে--

`http://www.isical.ac.in/~arnabc/complex/`

যা যা ভুলত্রুটি ধরা পড়বে, তার একটা তালিকা ওখানে দেওয়া থাকবে। আর যদি কোনো মতামত জানাতে চাও, বা প্রশ্ন করতে চাও, তবে তার জন্য ওখানে একটা জায়গা আছে। সেখানে লিখে দিলেই আমি email পেয়ে যাব। তাছাড়াও যোগাযোগ করার জন্য email (arnabc74@gmail.com) কিংবা বা ফোন বা Whatsapp (9231542600) ব্যবহার করতে পারো। তবে হ্যাঁ, এই বেলা বলে রাখি, আমি কিন্তু প্রাইভেটে পড়াই না। অতএব ওই অনুরোধ করে ফোন করলে ফোনের পয়সাটাই খালি জলে যাবে।

অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
গোড়ার কথা

DAY 1
"মাইনাসে মাইনাসে প্লাস হয়"

"মাইনাসে মাইনাসে প্লাস হয়"
এটুকুই জেনে রাখো ভাই হে,
এমনটা খামোখা যে কেন হয়,
সেটা আর ভেবে কাজ নাই রে!
--একটা ইংরাজি হাসির কবিতার তর্জমা

এই বইতে আমরা complex analysis নামে একটা বিষয় শিখব। অংকের দুনিয়ার অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এটা। সেই যে ছোটোবেলায় শিখেছিলে "মাইনাসে মাইনাসে প্লাস হয়", সেখান থেকেই আসলে এই বিষয়টার জন্ম। সেই জিনিসটা একটু মনে করে নেওয়া যাক। যেমন, যদি 2×3 করো, তবে 6 পাবে, আর যদি $(-2)\times(-3)$ করো, তাহলেও "মাইনাসে মাইনাসে প্লাস" হয়ে গিয়ে উত্তর হবে সেই 6. এই ব্যাপারটা আমাদের ছোটো থেকেই গিলিয়ে দেওয়া হয়, আর আমরাও দিব্যি সুবোধ বালকবালিকার মতো গিলে ফেলে অংক পরীক্ষায় নম্বর পাওয়ার চেষ্টা করি। (অবশ্য কিছু বেয়াদব ছাত্রছাত্রী থাকে, যারা "এমনটা কেন হবে?" প্রশ্ন তুলে শোরগোল করে, কিন্তু শেষটায় পরীক্ষায় কম নম্বর পেয়ে চুপ মেরে যায়[1])। যাই হোক, এই "মাইনাসে মাইনাসেও প্লাস" আবার "প্লাসে প্লাসেও প্লাস" মন্ত্রের ফলে যেটা দাঁড়ায় সেটা হল, কোনো সংখ্যাকে নিজের সঙ্গে গুণ করলে (মানে square করলে) উত্তরটা কোনো দিনই negative হতে পারে না। সুতরাং যদি বলি "-1-এর square root কত?", তবে তার উত্তর হয় না। ক্লাস টেন অবধি আমরা এটাই শিখে থাকি।

গোল বাঁধে হায়ার সেকণ্ডারীতে এসে। সেখানে দেখি পাঠ্য বইতে লিখেছে -1-এর নাকি দুটো square root হয়েছে, তাদের নাম রাখা হয়েছে i আর $-i$. কি আপদ, এ যে পুরো দশরথের কেস-- আহা খোকা নেই, বড় কষ্ট, কোথা থেকে কোন্ মুনি এসে যজ্ঞটজ্ঞ করে দিলেন, আর অমনি দেখতে দেখতে একেবারে চার-চারটে খোকা হয়ে একাকার! ব্যাপার দেখে আমি তো থ! অবশ্য $i^2=-1$ ধরে নিয়ে অংক করতে বড় একটা অসুবিধা নেই, যেমন $(2+3i)(4-3i)$ বার করতে গেলে এমনি গুণ করে দিলেই হল--

$$(2+3i)(4-3i) = 8+12i-6i-9i^2 = 8+6i-9i^2.$$

এবার সবশেষে ওই i^2-এর জায়গায় চোখ বুঁজে -1 বসিয়ে দিলেই হল, তবে উত্তর হবে $17+6i$. এইরকম চোখ বুঁজে কয়েকটা নিয়ম চালাতে পারলেই হায়ার সেকণ্ডারীতে complex number-এর অংকগুলো বেশ নামিয়ে দেওয়া যায়। যদিও ছোটোবেলার শেখা "negative সংখ্যার square root হয় না" আর "i হল -1-এর square root" এই দুয়ের বিরোধের খচখচানিটা থেকেই যায়...।

আসলে এই খচখচানির মধ্যেই লুকিয়ে আছে complex analysis-এর জন্মরহস্য। না, লোকে মোটেই হঠাৎ খামোখা "ধরি, -1-এর square root হল i" বলে রাতারাতি অংক কষতে শুরু করে নি। এই i জিনিসটা যাঁদের আবিষ্কার, তাঁরা নিজেরাও মনে করতেন negative সংখ্যাদের square root হয় না। কিন্তু তাও কীভাবে তাঁরা অনিবার্যভাবেই i-এর গায় ধাক্কা খেয়েছিলেন, সেই গল্পটা[2] সংক্ষেপে একটু না বললেই নয়! সেই গল্পের পরে আমরা complex analysis-এর গুরুগম্ভীর আলোচনা শুরু করব।

---

[1] অথবা ভবিষ্যতে গণিতজ্ঞ হয়।

[2] Paul Nahin নামে এক ভদ্রলোক এই নিয়ে একটা বই লিখেছেন The story of i, an imaginary tale. সেখান থেকেই গল্পটা পেয়েছি।

1.1 কী করে i এল?

অনেক কাল আগে ইটালীতে এক দল লোকের পেশা ছিল অংকের ধাঁধার লড়াই লড়াই খেলা। রীতিমত সভা করে দুই পক্ষের মধ্যে ধাঁধা যুদ্ধ হত। একপক্ষ একটা ধাঁধা হাঁকল, অন্য পক্ষ যদি তার সমাধান করতে পারল তো ভালো, নইলে পরাজয় মেনে নিতে হবে। তারপর আবার ওই পক্ষের পাল্টা ধাঁধা আসবে। এইভাবে ধরো গোটা তিরিশেক ধাঁধা বিনিময়ের পরে নিষ্পত্তি করা হবে কে জিতল। যে জিতবে তার বেজায় সম্মান, অনেক সময়ে দেশের ধনীরা এসব খেলায় আমোদ পেত, ফলে বিজয়ীর কপালে পুরস্কারের টাকার অংকও কম মোটা ছিল না। সুতরাং ধাঁধারুরা সর্বদাই চেষ্টায় থাকত কীভাবে নতুন ধাঁধা বানানো যায়, এবং নিজের ধাঁধার সমাধান কিছুতেই তারা ফাঁস করত না। এমনি এক ধাঁধারু মাথা খাটিয়ে এই ধাঁধাটা বার করেছিলেন-- একটা equation দেওয়া থাকবে $x^3 + px = q$ চেহারার যেখানে p, q হল যে কোনো দুটো positive integer. এটার অন্ততঃ একটা সমাধান বার করতে হবে। অবশ্যই বিভিন্ন আসরে তিনি বিভিন্নরকম p, q দিতেন। যেমন কোথাও হয়তো বললেন, এমন একটা সংখ্যা বলো যাতে তার cube-এর সঙ্গে সেই সংখ্যার তিনগুণ যোগ করলে 6 হয়। এখানে $p = 3$ আর $q = 6$ নেওয়া হয়েছে। তিনি ভিতরে ভিতরে যে কোনো p, q-এর জন্যই সমাধানের একটা general উৎকটগোছের ফর্মুলা বার করে রেখেছিলেন--

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

বইয়ের গোড়াতেই এমন বিচ্ছিরি একটা ফর্মুলা দেখে ঘাবড়ে যেও না যেন। এটা বিচ্ছিরি এবং বার করাটা কঠিন বলেই সেই ধাঁধারুর এটা খুব মনে ধরেছিল। এবং এই কৌশলটা তিনি কাউকে ফাঁস করতেন না। খালি মৃত্যুর আগে এক প্রিয় শিষ্যকে বলে গিয়েছিলেন। শিষ্যটি অংক-টংক তেমন পারত না, এখন কৌশলটা হাতে পেয়ে সে ফুর্তির চোটে এক দুঁদে ধাঁধারু Tartaglia-কে চ্যালেঞ্জ জানিয়ে বসল। Tartaglia আগে থেকেই জানতেন যে, সেই ধাঁধারু ওই বিশেষ চেহারার equation-টা দিয়ে ধাঁধা বানাতেন। তার অর্বাচীন শিষ্য যখন এত বড় চ্যালেঞ্জ ছুঁড়ে দেবার সাহস করেছে, তার মানে গুরুর কাছ থেকে নিশ্চয়ই কৌশলটা শিখে নিয়েছে। অতএব তিনিও উঠে পড়ে লাগলেন কৌশলটা নিজেই বার করে ফেলতে, এবং অনেক চেষ্টা করে শেষমেশ প্রতিযোগিতার ঠিক এক দিন আগে সফল হলেন। তারপর কী হল আন্দাজ করতেই পারো। তিরিশটা ধাঁধা দুপক্ষ থেকেই দেওয়া হল। অর্বাচীন শিষ্যের প্রতিটা ধাঁধাই ওই একই কায়দার, প্রতিটাই Tartaglia অনায়াসে করে দিলেন। কিন্তু Tartaglia-র একটা ধাঁধাও অন্য পক্ষ করতে পারল না। একেবারে গোহারান হার বলে যাকে! খবরটা ছড়াতে দেরী হল না, এবং অনতিবিলম্বেই উঠল গিয়ে আরেক ধাঁধারুর কানে। এনার নাম Cardano. এই তুখোড় বুদ্ধি মানুষটিকে অবশ্য খালি ধাঁধারু বললে কিছুই বলা হয় না। ইনি একাধারে অংক, ভৌত বিজ্ঞান এবং রসায়নের পণ্ডিত, তেমনি আবার জোতির্বিদও বটেন, আবার পাকা জুয়াড়ি হিসেবেও তাঁর বেজায় নাম (এবং বদনাম)। Probability-র অন্যতম প্রতিষ্ঠাতাও তিনি। এ হেন Cardano খবর পেয়ে এসে Tartaglia-কে ধরে পড়লেন, ওই কৌশলটা তাঁকে শেখাতেই হবে। প্রথমে তো Tartaglia কিছুতেই বলবেন না, কিন্তু অনেক অনুরোধের পরে শেষে বলেই দিলেন। Cardano এবার সাজিয়ে গুছিয়ে ফর্মুলাটার একটা নতুন চেহারাও বার করে ফেললেন। সেটা হল $x^3 = px + q$-এর একটা সমাধান--

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}. \qquad (*)$$

এমনিতে এর মধ্যে বিরাট নতুন কিছু নেই, খালি আগের equation-এর p-এর জায়গায় $-p$ বসানো। কিন্তু তাতেই বাঁধল একটা সমস্যা। সমস্যাটা বোঝার জন্য একটা জিনিস জানা দরকার-- Cardano আগে একটা মজার ঠকানো ধাঁধা বানিয়েছিলেন, সেটা এইরকম--

> 10-কে এমন দুটো অংশে ভাঙো (মানে $x + y = 10$), যাতে তাদের গুণফল হয় 40 (অর্থাৎ $xy = 40$)।

Cardano-র ঠকানো উত্তর ছিল $x = 5 + \sqrt{-15}$ এবং $y = 5 - \sqrt{-15}$. অবশ্যই লোকে হাঁ হাঁ করে বলে উঠত,-- "ওই $\sqrt{-15}$-টার কোনো মানে হয় না"! Cardano মুচকি হেসে বলতেন মানে না থাকলেই বা কী? আমি তো আর অংকের পরিচিত নিয়মগুলোর বাইরে যাচ্ছি না, যোগ করেই দ্যাখো

$$(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10,$$

কারণ $\sqrt{-15}$ যাই হোক না কেন, যেকোনো সংখ্যা থেকেই নিজেকে বিয়োগ করলে যে 0 হয়, সেটা তো মানবে? আর $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ হয়, সুতরাং

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 5^2 - (-15) = 40.$$

ব্যস্! এর মধ্যে $\sqrt{-15}$ খায় না মাথায় মাখে, এতসব ভাববার দরকারটা কোথায়? মজা করে এসব বললেও, Cardano নিজেই জানতেন যে এটা নেহাত ফাঁকি হল। আসলে এরকমভাবে 10-কে দুভাগে ভাঙা অসম্ভব। সেই জন্যই negative সংখ্যার square root এসে যায়। Cardano বিশ্বাস করতেন যে, কোনো অংকে negative সংখ্যার square root এসে যাওয়া মানেই হল সেই অংকটার আসলে কোনো উত্তর হয় না।
এবার আবার (*)-এর গল্পে ফিরে আসি। সে আমলে ইটালীতে একজন নামকরা ইঞ্জিনীয়ার ছিলেন, তাঁর নাম Bombelli. তাঁর তৈরী কিছু স্থাপত্য এখনও আছে! ইনি একবার এই অংকটা নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছিলেন--

$$x^3 = 15x + 4.$$

অবশ্য খানিকক্ষণ হাতড়ে হাতড়েই এর একটা সমাধান তিনি করে ফেলেছিলেন, $x = 4$. এই অংকটা দেখেই Cardano ভাবলেন, বাঃ এই তো আমার সেই ফর্মুলাটা লাগাবার পক্ষে একটা খাসা অংক পাওয়া গেছে। এই না বলে তিনি যেই (*)-এ $p = 15$ আর $q = 4$ বসিয়েছেন, অমনি উত্তর পেলেন--

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

দেখে তো তাঁর মাথায় হাত! Negative সংখ্যার square root এসে গেল যে! তার মানে তো equation-টার সমাধান থাকার কথা নয়, কিন্তু দেখাই যাচ্ছে যে $x = 4$ একটা সমাধান হচ্ছে! Cardano জীবদ্দশায় এই রহস্যের কিনারা করে যেতে পারেন নি। সেটা করেছিলেন Bombelli. এবং সেটা করে এমন আশ্চর্য হয়ে গিয়েছিলেন যে, সমাধানের গোড়াতে লিখেছিলেন--

> আমি যা লিখতে চলেছি, তাতে আপনারা আমাকে পাগল ভাবতে পারেন। বস্তুতঃ আমার নিজের কাছেই এটা পাগলামি বলে মনে হচ্ছে। কিন্তু তাও না বলে পারছি না যে $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$-কে আসলে $2+\sqrt{-1}$ আকারে লেখা যায়[3], এবং একইভাবে $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ হয় $2-\sqrt{-1}$. সুতরাং দুজনকে যোগ করলে ওই $\sqrt{-1}$-টা কেটে যায়, এবং সত্যিই উত্তর আসে 4.

সে আমলে এটা ছিল একটা বিরাট বিস্ময়ের ব্যাপার। এ থেকেই মানুষ প্রথম বুঝতে পারল যে $\sqrt{-1}$-কে একটা কিছু সংখ্যা বলে কল্পনা করে সাধারণ অংকের নিয়ম লাগিয়ে গেলেই সঠিক উত্তর পাওয়া যায়। সেই হল complex number-এর শুরু।

1.2 ছবি দিয়ে বোঝা

এই ঘটনায় খানিকটা চাঞ্চল্যের সৃষ্টি হলেও তার পর বহুদিন পর্যন্ত লোকে আর complex সংখ্যাকে গুরুত্ব দিয়ে ভাবে নি। তার কারণ হল কোনো সত্যিকারের সমস্যায় complex সংখ্যার কোনো ভূমিকা চোখে পড়ে নি। যেখানেই কোনো বাস্তব জীবনের অংকে complex সংখ্যা আসছিল, সেখানেই দেখা যাচ্ছিল যে সমস্যাটার সমাধান আসলে অসম্ভব।
সে আমলের বিখ্যাত গণিতজ্ঞরাও complex সংখ্যাদের প্রতি বিরূপ মনোভাবই প্রকাশ করতেন। বিখ্যাত গণিতজ্ঞরা যদি সবাই একই কথা বলতে থাকেন, তবে সেই অবস্থার পরিবর্তনের জন্য স্বভাবতঃই প্রয়োজন হয় কোনো অখ্যাত অগণিতজ্ঞের, যিনি গণিতজ্ঞদের চাপিয়ে দেওয়া ধ্যান-ধারণা দূরে সরিয়ে নিজের মত করে ভাবতে পারেন। আমাদের কাহিনীর পরবর্তী নায়ক ঠিক এরকমই এক ভদ্রলোক, পেশা জমিজরীপ, নেশা শখের অংক, নাম Casper Wessel, নিবাস ডেনমার্ক। ওনার কাজ ছিল জমিজরীপ করে ম্যাপ বানানো, তাই ওনার মাথায় একটা নতুন ফন্দি এল-- complex সংখ্যাদের দিয়ে একটা ম্যাপ বানালে হয় না? খানিকটা লড়াই করে ম্যাপ বানাবার একটা কায়দাও বার করে ফেললেন উনি, এবং সেটা মাতৃভাষায় লিখে পাঠিয়ে দিলেন ডেনমার্কের এক গবেষণাকেন্দ্রে। সেই গবেষণাকেন্দ্রে এর আগে কখনো এরকম অগণিতজ্ঞের কাজ ধর্তব্যের মধ্যেই আনা হয় নি। কিন্তু Wessel-এর কাজ দেখে তাঁকে স্বীকৃতি না দেওয়া অসম্ভব। এত সহজ অথচ অসাধারণ সেই ম্যাপ আঁকার কৌশল যে আজও পর্যন্ত আমরা সেই পথেই চলেছি। সেই পথেই মানুষ প্রথম দেখতে পেল complex সংখ্যারা কী জিনিস, এবং তার জন্য কোনো গোঁজা দেবার দরকার পড়ে না।

[3] চোখ কান বুঁজে $(a+b)^3$-এর ফর্মুলা লাগিয়ে $(2+\sqrt{-1})^3$ বার করলেই $2+\sqrt{-121}$ আসবে।

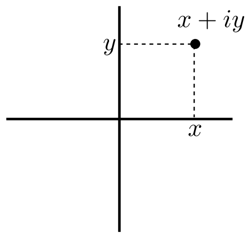


Fig 1

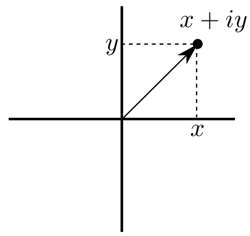


Fig 2

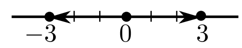


Fig 3

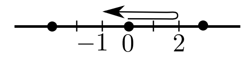


Fig 4

Wessel-এর সেই কৌশলটাই এবার বলব। আগেই বলেছি Wessel জমি জরীপ করা মানুষ, complex সংখ্যাদের তাই উনি মাটিতে পেড়ে ফেলে বললেন, মনে করা যাক complex সংখ্যারা সবাই জমির উপর একেকটা বিন্দু। Bombelli-র কাজ থেকেই মোটামুটিভাবে জানা ছিল যে, complex সংখ্যাদের নিয়ে যতই যা করো না কেন, উত্তরটাকে শেষমেশ $x+iy$ আকারে লেখা যায়, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. সুতরাং সেটাকে (x, y) বিন্দু বলে ভাবাটা শক্ত কিছু নয় (Fig 1)। এবার Wessel বললেন যে--

> origin থেকে সেই বিন্দু পর্যন্ত একটা তীর চিহ্ন আঁকতে হবে (Fig 2)। সুতরাং একটা complex সংখ্যা মানে দাঁড়ালো একটা দৈর্ঘ্য (তীরটা কত লম্বা) এবং একটা অভিমুখ (তীরটা কোনদিকে মুখ করে আছে)।

Real সংখ্যাদের বেলাতেও কিন্তু ব্যাপারটা একইরকম, খালি সেখানে আমরা একটা সরলরেখা বরাবর কাজ করি। যেমন, সেখানে 3 মানে 0-র ডানদিকে তিন ঘর দূরের বিন্দু, আর -3 হল 0 থেকে বাঁদিকে তিন ঘর (Fig 3)।
এবার real সংখ্যাদের কেমন করে যোগ করি সেটাকে ছবি দিয়ে বোঝা যাক। ধরো বললাম $2+(-3)$. তার মানে হল 0 থেকে শুরু করে প্রথমে ডানদিকে 2 ঘর যাও, তারপর সেখান থেকে বাঁদিকে 3 ঘর। যেখানে পৌঁছবে সেটাই হল $2+(-3)$. বোঝার জন্য Fig 4 দেখে নাও। Wessel বললেন, একইরকম ব্যাপার করব complex সংখ্যাদের বেলাতেও। যেমন, $(2+3i)+(-5+i)$ মানে হল 0 থেকে শুরু করে প্রথমে $2+3i$-এর তীর চিহ্ন বরাবর যাওয়া, তারপর সেখান থেকে $-5+i$-এর তীরের মত এগোনো (Fig 5)।
এবার Wessel পড়লেন গুণ করা নিয়ে। আবার সাধারণ সংখ্যাদের গুণের দিকে তাকানো যাক। আমরা জানি $2\times 3=6$ হয়, আবার $2\times(-3)=(-2)\times 3=-6$ এবং $(-2)\times(-3)=6$. অর্থাৎ তীরচিহ্ন দিয়ে ভাবলে, তীরচিহ্নগুলোর দৈর্ঘ্য গুণ হয়ে যায়, আর অভিমুখটা নির্ধারিত হয়, "প্লাসে প্লাসে প্লাস", "প্লাসে মাইনাসে মাইনাস", "মাইনাসে মাইনাসে প্লাস" ইত্যাদি নিয়ম দিয়ে। Wessel এই ধারণাটাকে complex তীর চিহ্নদের বেলায় কীভাবে লাগালেন শোনো। ধরো দুটো complex সংখ্যা আছে z_1 আর z_2, যাদেরকে Fig 6-এর মত তীরচিহ্ন দিয়ে দেখিয়েছি। এদের গুণফলটাও একটা তীরচিহ্ন হবে। সেটা বার করার জন্য Wessel বললেন--

> এখানেও তীরচিহ্নদুটোর দৈর্ঘ্য গুণ হবে। আর z_1 এবং z_2 তীর দুটো positive x-axis-এর সঙ্গে যত কোণে হেলে আছে, সেই কোণদুটোকে যোগ করে দিলে যে কোণটা পাওয়া যাবে, গুণফলের তীরটা সেই কোণে হেলে থাকবে।

Fig 5

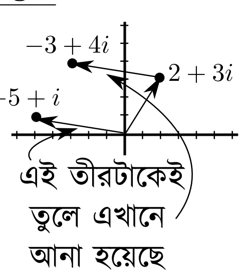
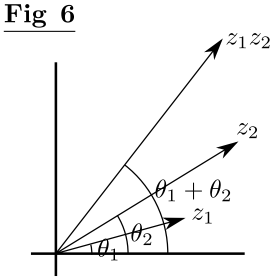


Fig 6



এবং কি আশ্চর্য, দুটো complex সংখ্যাকে অঙ্কের মত $i^2 = -1$ ধরে গুণ করলে যা পাওয়া যায়, সেটাও ঠিক তাই। সুতরাং Wessel প্রথম দেখালেন যে, complex সংখ্যাদের যোগ এবং গুণ করার জন্য কোনো কারচুপি করতে হয় না, জ্যামিতিকভাবে ভাবলেই হয়। যেমন, এই কায়দায় কোনো complex সংখ্যাকে i দিয়ে গুণ করা মানে আর কিছুই নয়, তীরচিহ্নটাকে স্রেফ 90° কোণে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে ঘুরিয়ে দেওয়া, ব্যস্! এবার $i^2 = -1$ মানেটাও জলের মত পরিষ্কার--আমরা জানি যে -1 দিয়ে গুণ করলে কোনো তীরচিহ্নের অভিমুখটা উল্টে যায়। যদি দুবার পরপর 90° ঘোরাও, তাহলেও একই ব্যাপার হতে বাধ্য।

Complex সংখ্যাদের ছবির দিয়ে চিন্তা করার এত সহজ পদ্ধতি আর হয় নি। তাই আজও আমরা এই পদ্ধতি ব্যবহার করি। Complex সংখ্যাদের এই ম্যাপকে নাম দেওয়া হয় **complex plane** বা **Argand plane**. এখানে Argand-এর নামটা আবার কোথা থেকে এল? আসলে দুঃখের কথা যে Wessel ডেনমার্কের ভিতরে যতই স্বীকৃতি পান না কেন, সে আমলে ডেনমার্কের সঙ্গে বাইরের দেশগুলোর যোগাযোগ খুব কমই ছিল। তাই দেশের বাইরে কেউই Wessel-এর অসামান্য অবদানের কথা জানতে পারে নি। প্রায় এক শ' বছর পরে Argand একই জিনিস পুনরাবিষ্কার করেন। তাই Argand-এর নামটাই বেশী জনপ্রিয় হয়েছিল।

1.3 স্মৃতি রোমন্থন

Complex সংখ্যাদেরকে ছবি দিয়ে ভাবার কায়দা কানুন আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতেই শিখে থাকি। এখানে একবার মনে করিয়ে দিই।

- Complex plane-টা যেন একটা গ্রাফ কাগজ। $a, b \in \mathbb{R}$ হলে $a + ib$-কে আঁকা হয় (a, b) বিন্দু হিসেবে। এখানে x-axis-টাকে বলে **real axis** আর y-axis-টাকে বলে **imaginary axis.** বোঝার জন্য Fig 7 দ্যাখো।

- যেকোনো complex সংখ্যাই একটা বিন্দু, আবার একটা তীরচিহ্নও বটে। তীরচিহ্ন-টা সাধারণতঃ আঁকা হয় origin থেকে সেই বিন্দুটা পর্যন্ত। কিন্তু তীরের গোড়াটা কোথায় আছে, সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়। গুরুত্বপূর্ণ হল তীরটার দৈর্ঘ্য এবং অভিমুখ। যেমন Fig 8-এর সবগুলো তীরচিহ্নই একই complex সংখ্যা বোঝাচ্ছে।

- Complex সংখ্যাদের বেলাতে $<$, $\leq$, $>$ বা $\geq$ ব্যবহার করা চলে না। $\mathbb{R}$-কে একটা লাইন বলে কল্পনা করলে "ছোটো মানে বাঁদিকে, বড় মানে ডানদিকে" এরকম ভাবা চলত। কিন্তু $\mathbb{C}$ হল একটা plane, সেখানে $2 + 3i$-কে বড় বলবে নাকি $3 + 2i$-কে? সেই একই কারণে complex সংখ্যাদের positive বা negative-ও বলা যায় না। কখনো কখনো কাউকে বলতে শুনেছি যে, i হল -1-এর positive square root. কিন্তু সেটা ভুল। খালি এটুকুই বলা চলে যে, i হল -1-এর <u>একটা</u> square root, ব্যস্! যদি কখনো দ্যাখো কেউ লিখছে $z \in \mathbb{C}$ এবং $z > 1$, তবে খুব সম্ভবতঃ বোঝাতে চাইছে যে, $z = x + 0i$ আকারের, যেখানে $x \in \mathbb{R}$ এবং $x > 1$. তবে এরকমটা না লেখাই ভালো, তার চেয়ে বরং $z \in \mathbb{R}$ এবং $z > 1$ বললেই ভুল বোঝাবুঝির সম্ভাবনা থাকে না।

- যদি $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ হয়, তবে $z_1 + z_2$ ছবি দিয়ে বার করা যাবে এইভাবে--প্রথমে z_1 আর z_2-কে দুটো তীর বলে ভাবো, z_1-এর তীরটার গোড়াটা রাখো origin-এ, আর তারপরে z_2-র তীরটা জুড়ে দাও। তবে এই দ্বিতীয় তীরটার ডগাটা থাকবে $z_1 + z_2$-তে। Fig 9 দেখে নাও।

- যদি $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ হয়, তবে ওদেরকে বিন্দু বলে ভাবলে $\frac{z_1+z_2}{2}$ হবে ওদের মধ্যবিন্দু (Fig 10)।

Fig 7

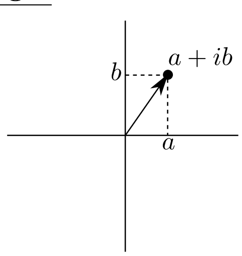


Fig 8

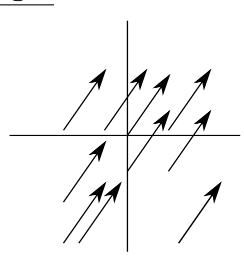


Fig 9

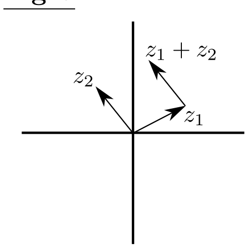
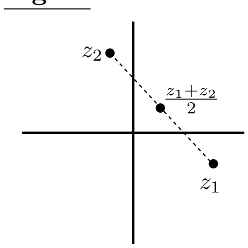


Fig 10



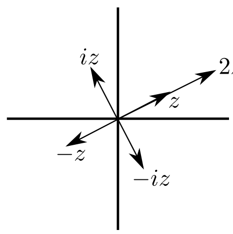


Fig 11

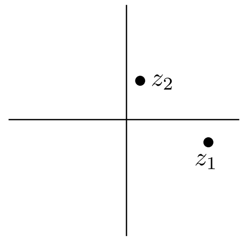


Fig 12

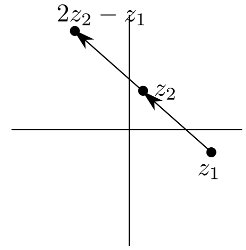


Fig 13

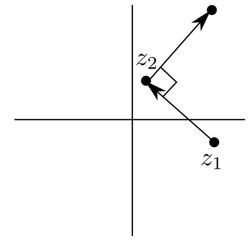


Fig 14

- যদি একটা complex সংখ্যাকে 2 দিয়ে গুণ করো, তবে তীরটার অভিমুখ বদলাবে না, খালি 2 গুণ লম্বা হয়ে যাবে। যদি -1 দিয়ে গুণ করো, তবে দৈর্ঘ্য বদলাবে না, খালি অভিমুখটা উল্টে যাবে। যদি i দিয়ে গুণ করো তবে তীরটার দৈর্ঘ্য বদলাবে না, খালি অভিমুখটা $90°$ ঘুরে যাবে ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে। যদি গুণটা করতে $-i$ দিয়ে, তবে একই ব্যাপার হত ঘড়ির কাঁটার দিকে। এ সবকিছুরই ছবি রয়েছে Fig 11-এ।

এই ধারণাগুলো কাজে লাগিয়ে চট করে নীচের অংক দুটো করে গা গরম করে নাও।

Example 1: Fig 12-এ দুটো বিন্দু আছে z_1 আর z_2. যদি z_1 থেকে z_2 পর্যন্ত যাও, এবং তারপর একই দিকে ওই একই দূরত্ব আরো যাও, তবে কোথায় পৌঁছবে?

SOLUTION: প্রথমে z_1 থেকে z_2 অব্ধি একটা তীর আঁকো (Fig 13)। সেটা হবে $z_2 - z_1$. যদি সেই তীরটার গোড়াটা z_2-তে নাও, তবে ডগাটা হবে $z_2 + (z_2 - z_1) = 2z_2 - z_1$, সেটাই উত্তর। ■

Example 2: আবার Fig 12-র z_1 আর z_2 নাও। যদি z_1 থেকে z_2 পর্যন্ত যাও, এবং তারপর ঘড়ির কাঁটার দিকে $90°$ ঘুরে ওই একই দূরত্ব আরো যাও, তবে কোথায় পৌঁছবে? Fig 14 দেখে নাও।

> তারপরেতে হঠাৎ বেঁকে ডাইনে মোচড় মেরে
> ফিরবে আবার বাঁয়ের দিকে তিনটে গলি ছেড়ে।
> --ঠিকানা (সুকুমার রায়)

SOLUTION: z_1 থেকে z_2 অব্ধি তীরটা যে $z_2 - z_1$, সে তো আগের অংকেই বলেছি। সেটাকে ঘড়ির কাঁটার দিকে $90°$ ঘোরালে যে তীরটা পাবে, সেটা হল $-i(z_2 - z_1)$. যদি এই তীরটার গোড়াটা z_2-তে নাও, তবে ডগাটা হবে $z_2 - i(z_2 - z_1) = (1-i)z_2 + iz_1$, সেটাই উত্তর। ■

1.4 গুপ্তধনের গল্প

Complex সংখ্যাদের জ্যামিতিক রূপ নিয়ে একটা মজার গল্প প্রচলিত আছে। আগেকার দিনে জলদস্যুরা অনেক সম্পত্তি মাটির নীচে গুপ্তধন করে পুঁতে রাখত। পাছে নিজেরাই পরে জায়গাটা ভুলে যায়, সেই জন্য একটা সংকেতও লিখে রাখত। সংকেতটা এমনভাবে লিখত, যাতে অন্য লোকের হাতে পড়লেও সহজে তার পাঠোদ্ধার না করা যায়। রবীন্দ্রনাথের লেখা "গুপ্তধন" বা

Fig 15

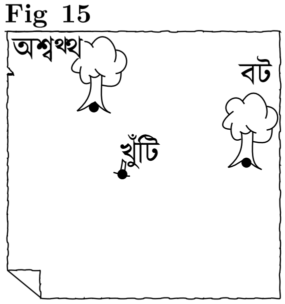


Fig 16

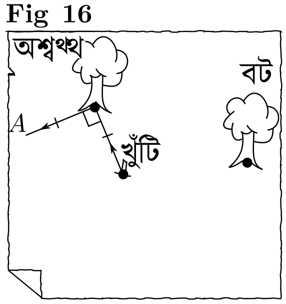


Fig 17

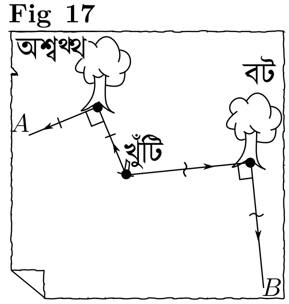
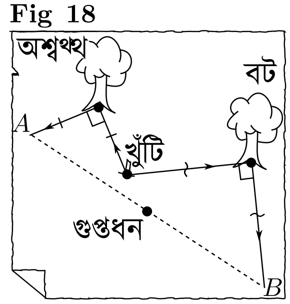


Fig 18



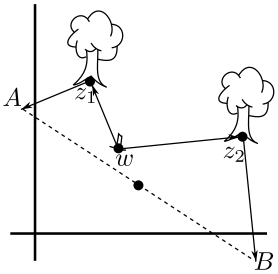


Fig 19

সত্যজিত রায়ের লেখা ফেলুদার "রয়েল বেঙ্গল রহস্য" যারা পড়েছ, তাদের কাছে এরকম হেঁয়ালি করা সংকেত অপরিচিত নয়। কিন্তু আমাদের গল্পের জলদস্যু তাদের এক কাঠি উপর দিয়ে যায়। তার হেঁয়ালির জট ছাড়াতে অংক লাগে। সংকেতটা এইরকম--

> গুপ্তধনটা আছে প্রশান্ত মহাসাগরের বুকে ... দ্বীপে[4]। সেই দ্বীপে পৌঁছে দেখা যাবে একটা প্রকাণ্ড বট গাছ আছে, আর তার থেকে বেশ কিছুটা দূরে আছে একটা বিশাল অশ্বত্থ গাছ। এবার খানিকক্ষণ খুঁজলেই একটা খুঁটি চোখে পড়বে (Fig 15)। সেখান থেকে পা মেপে মেপে সোজা যেতে হবে অশ্বত্থগাছটা পর্যন্ত (Fig 16), তারপর বাঁদিকে 90° ঘুরে গিয়ে যতটা এসেছিলে ফের ততটা যেতে হবে। যেখানে পৌঁছলে সেখানে একটা চিহ্ন দিয়ে রাখো, ধরো A. এবার ফের খুঁটিতে ফিরে যাও। আবার পা মেপে মেপে সোজা রওনা দাও, কিন্তু এবার যাও বট গাছ পর্যন্ত (Fig 17)। সেখানে পৌঁছে ডান দিকে 90° ঘুরে যতটা এসেছিলে ততটাই ফের যাও। যেখানে পৌঁছলে তাকে বলো B. তাহলে AB-র ঠিক মধ্যবিন্দুতে খুঁড়লে গুপ্তধন পাবে (Fig 18)।

এইটুকুর মধ্যে কোনো হেঁয়ালি নেই। হেঁয়ালিটা হল এই যে, বাস্তবে বট গাছ আর অশ্বত্থ গাছদুটো থাকলেও আসলে খুঁটি-টুঁটি কিচ্ছু নেই। ওটা স্রেফ ভাঁওতা। সুতরাং উৎসাহী লোকে যখন সেই দ্বীপে যাবে গুপ্তধন উদ্ধার করতে, সে প্রথমেই খুঁটি খুঁজে না পেয়ে হাল ছেড়ে দেবে। কিন্তু যে লোক complex সংখ্যা জানবে, সে ঠিক গুপ্তধনটা বার করতে পারবে। কী করে বলো তো! উত্তরটা এক্ষুণি দেব, তবে নিজে বার কয়েক চেষ্টা না করলে মজাটা পাবে না কিন্তু!
আমরা চিন্তা করব Wessel-এর মত করে। দ্বীপটা ধরো complex plane-এ রয়েছে। Origin আর axis দুটো যেভাবে খুশি নিতে পারো। ধরো আমরা Fig 19-এর মত করে নিলাম। তাহলে দ্বীপের প্রতিটা বিন্দুই এককেটা complex সংখ্যা। ধরো অশ্বত্থ গাছটা আছে z_1 বিন্দুতে, বটগাছটা z_2-তে আর খুঁটিটা w বিন্দুতে। তাহলে খুঁটি থেকে অশ্বত্থগাছ অব্ধি যাওয়া মানে $z_1 - w$. এইবার বাঁদিকে 90° ঘুরবে (মানে ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে), তার পর একই দূরত্ব যাবে। তাহলে পৌঁছবে A-তে, মানে

$$A = z_1 + i(z_1 - w).$$

একইভাবে

$$B = z_2 - i(z_2 - w).$$

এদের মধ্যবিন্দু হল $\frac{A+B}{2} = \cdots = \frac{(1+i)z_1+(1-i)z_2}{2}$. লক্ষ করো, w-টা কেমন কেটে বেরিয়ে গেছে। অর্থাৎ খুঁটিটার কোনো দরকারই হচ্ছে না। এইটাকে তুমি একটু সাজিয়ে এভাবে লিখতে পারো--

$$\frac{z_1 + z_2}{2} + i \times \frac{z_1 - z_2}{2}.$$

এটা থেকে আমরা নিজেরাই একটা নতুন সংকেত বানিয়ে নিতে পারি--

> $\frac{z_1+z_2}{2}$ হল অশ্বত্থ আর বটের মধ্যবিন্দু। আবার $z_1 - z_2$ হল বট থেকে অশ্বত্থ পর্যন্ত যাওয়া। সেটার অর্ধেক, মানে $\frac{z_1-z_2}{2}$, হল বট থেকে অশ্বত্থর দিকে মুখ করে এগোনো, কিন্তু খালি অর্ধেকটা পর্যন্ত।

সুতরাং নতুন সংকেতটা দাঁড়াচ্ছে এইরকম--

[4]আসল নামটা ফাঁস করছি না, পাছে গুপ্তধন নিয়ে কাড়াকাড়ি পড়ে যায়।

- প্রথমে বট আর অশ্বত্থের ঠিক মাঝখানে দাঁড়াও ($\frac{z_1+z_2}{2}$)।
- এবার অশ্বত্থের দিকে মুখ করো এবং সেখান থেকে $90°$ ঘুরে যাও ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে,
- তারপর বট আর অশ্বত্থের মধ্যেকার দূরত্বের ঠিক অর্ধেকটা যাও।
- খুঁড়তে শুরু করো! Best of luck!

DAY 2
Modulus এবং argument

2.1 কাকে বলে?

Bombelli-র কাজ থেকে আমরা শিখেছিলাম যে, যেকোনো complex সংখ্যাকে $z = x + iy$ হিসেবে লেখা যায় (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$)। সেখানে complex সংখ্যাটাকে প্রকাশ করতে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করত x আর y, যাদেরকে বলে z-এর real আর imaginary অংশ। লেখার সময়ে লিখি $x = \text{Re}(z)$ এবং $y = \text{Im}(z)$. পরে Wessel-এর কাছ থেকে আমরা শিখলাম কোনো complex সংখ্যাকে[5] একটা তীরচিহ্ন হিসেবে ভাবতে। এইভাবে ভাবলে x, y-এর গুরুত্ব কিছুটা কমে যায়, গুরুত্ব পায় অন্য দুটো ব্যাপার-- তীরটা কতটা লম্বা এবং কোন্ দিকে মুখ করে আছে। তীরের দৈর্ঘ্যটাকে বলে complex সংখ্যাটার **modulus**, আর তীরটা positive real axis-এর সঙ্গে কত কোণে হেলে আছে, তাকে বলে complex সংখ্যাটার **argument.** লেখার সময়ে z-এর modulus-কে লেখে $|z|$ আর argument-কে লেখে $\arg(z)$. বোঝার জন্য Fig 20 দেখে নাও। যদি একটা complex সংখ্যাকে $x + iy$ আকারে দেওয়া থাকে (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$) তবে তা থেকে তার modulus আর argument বার করে ফেলা শক্ত নয়। সেই কায়দাতেই নীচের সংজ্ঞাদুটো তৈরী।

> DEFINITION: **Modulus**
> The **modulus** of a complex number $z = x + iy$ (where $x, y \in \mathbb{R}$) is defined as
> $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

যদি এই সংজ্ঞাটা বুঝতে অসুবিধা হয়, তবে Fig 21 দেখলেই বুঝবে যে এর পিছনে Pythagoras' theorem কাজ করছে। Modulus-এর সংজ্ঞাটা দিব্যি একটা ফর্মুলা দিয়ে দেওয়া গেল। কিন্তু argument-এর বেলায় ফর্মুলা লেখার পথে কিঞ্চিৎ সমস্যা আছে। সেই প্রসঙ্গে এক্ষুণি আসছি, আগে সংজ্ঞাটা আমরা জ্যামিতির সাহায্যে দিয়ে নিই--

[5] $0 + 0i$-কে অবশ্য তীর চিহ্ন বলে ভাবা যায় না। এটাই একমাত্র ব্যতিক্রম।

Fig 20

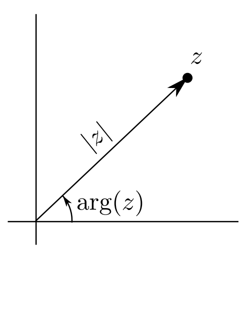
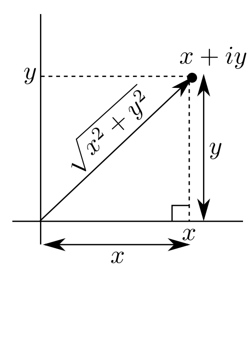


Fig 21



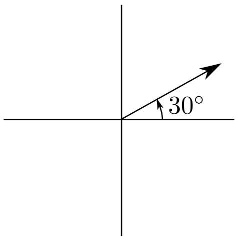


Fig 22

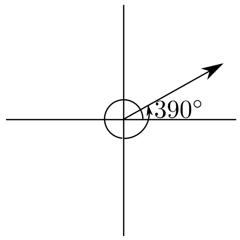


Fig 23

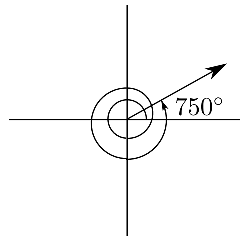


Fig 24

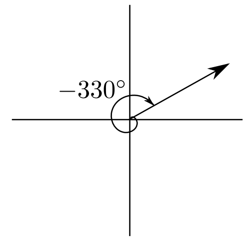


Fig 25

> DEFINITION: **Argument**
>
> Let $z \neq 0$ be any complex number. Then its **argument** is defined as
>
> $\arg(z) =$ the angle that OP makes with the positive real axis.
>
> Angles measured in the counterclockwise direction are considered positive. Also, $\arg(0)$ is undefined.

এই সংজ্ঞাটা ভালোমানুষের মত দেখতে হলে কী হয়, এর পেটে অনেক সমস্যা। সেগুলো এবার একে একে আলোচনা করব।

2.2 Set-valued function

কোনো জিনিস 360° (মানে 2π radian) ঘোরার পরে আবার গোড়ার অবস্থানেই ফিরে আসে। সুতরাং z-এর argument যদি 30° হয় (Fig 22), তবে সেটা $360^\circ + 30^\circ = 390^\circ$-ও বটে (Fig 23), আবার $2 \times 360^\circ + 30^\circ = 750^\circ$ হতেও আটক নেই (Fig 24)! এমন কি Fig 25-এর মত $30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$ বললেই বা ঠেকাচ্ছে কে? আসলে এখানে $\arg(z)$ হল একটা set,

$$\{30^\circ + n \times 360^\circ \ : \ n \in \mathbb{Z}\},$$

বা radian-এ প্রকাশ করলে

$$\left\{\frac{\pi}{6} + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

সেই কারণে $\arg(z)$-কে আমরা বলি একটা **set-valued function.** কেউ কেউ এটাকে **multi-valued function**-ও বলে থাকে।

সেই যে Wessel বলেছিলেন দুটো complex সংখ্যাকে গুণ করলে তাদের কোণ দুটো যোগ হয়ে যায়, সেটা আমরা arg ব্যবহার করে লিখতে পারি এইভাবে--

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

এর দুদিকই কিন্তু একেকটা set. এর মানে হল--

> যদি তুমি $\arg(z_1)$-এর যেকোনো একটা সদস্য এবং $\arg(z_2)$-এর যেকোনো একটা সদস্য নাও, এবং তাদের যোগ করো, তবে যোগফলটা $\arg(z_1 z_2)$-এর একটা সদস্য হতে বাধ্য। বিপরীতপক্ষে, যদি $\arg(z_1 z_2)$-এর যেকোনো একটা সদস্য নাও, তাকে তুমি এমনভাবে দুইভাগে ভাঙতে পারবে যাতে প্রথম ভাগটা $\arg(z_1)$-এর মধ্যে এবং দ্বিতীয় ভাগটা $\arg(z_2)$-এর মধ্যে থাকে।

এই প্রসঙ্গে $\mathbb{C}$-এর বিভিন্ন subset-দের যোগ, বিয়োগ ইত্যাদির সংজ্ঞা শিখে রাখো--

- যখনই দেখবে $A+B$ লেখা হয়েছে, যেখানে $A, B \subseteq \mathbb{C}$, তখনই জানবে এর সংজ্ঞা হল

$$A+B=\{a+b \ : \ a \in A, b \in B\}.$$

  লক্ষ করো, এখানে A-র সব element-এর সঙ্গে B-র সব element যোগ করা হচ্ছে।

- যদি $A-B$ দ্যাখো, তার মানে হল

$$A-B=\{a-b \ : \ a \in A, b \in B\}.$$

- আবার যদি $r \in \mathbb{C}$ আর $A \subseteq \mathbb{C}$ হয়, তবে rA মানে হল

$$rA=\{ra \ : \ a \in A\}.$$

  একইভাবে $A^2=\{a^2 \ : \ a \in A\}$.

এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান--$A+A$ আর $2A$ কিন্তু মোটেই একই জিনিস নয়! যেমন ধরো $A=\{0,1\}$ হলে $A+A=\{0+0,0+1,1+0,1+1\}=\{0,1,2\}$ হবে। কিন্তু $2A=\{0,2\}$.
সেই কারণে $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$ হলেও $z_1=z_2=z$-র জন্য ভুল করে যেন ভেবে বোসো না যে, $\arg(z^2)=2\arg(z)$ হবে, কারণ $\arg(z)+\arg(z)$ মোটেই $2\arg(z)$ নয়!
এই সব কারণে বুঝতেই পারছ, set-valued function নিয়ে কাজ করা অনেক সময়েই অসুবিধাজনক। তাই লোকে একটা কৌশল করেছে। এবার সেইটা শিখব।

2.3 Principal argument

আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে $\arg(z)$ হল একটা set. লোকে অনেক সময়ে পুরো set-টা নিয়ে কাজ না করে খালি একটা বিশেষ সদস্যকে নিয়ে কাজ করে। সেই বিশেষ সদস্যটাকে নির্বাচন করা হয় একটা বাড়তি শর্ত চাপিয়ে--কোণটাকে $(-\pi,\pi]$-এর মধ্যে থাকতে হবে। যেমন ধরো $\arg(i)=\left\{\frac{\pi}{2}+2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$. এর সদস্যরা 2π অন্তর অন্তর রয়েছে, তাই $(-\pi,\pi]$-এর মধ্যে খালি একটাই সদস্য পাওয়া যাবে, সেই বিশেষ সদস্যটা হল $\frac{\pi}{2}$. এই বাড়তি শর্তটা চাপানোর ফলে যে কোণটা পাওয়া গেল, তাকে লোকে লেখে **Argument** বা $\text{Arg}(z)$. যেমন $\text{Arg}(i)=\frac{\pi}{2}$. এখানে বড় হাতের 'A'-টা লক্ষ করো। মুখে বলার সময়ে বলে **principal argument**.
মনে রেখো, $\arg(z)$ একটা set, যার সদস্যরা 2π দূরত্ব অন্তর অন্তর রয়েছে। তাই যদি $\arg(z)$-এর একটা কোনো সদস্য হয় θ, অমনি বাকিদেরও হদিশ পেয়ে যাবে--

$$\arg(z)=\{\theta+2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

এই ব্যাপারটা কাজে লাগিয়ে আমরা $\text{Arg}(z)$ থেকে $\arg(z)$ বার করে ফেলতে পারি অনায়াসে। যেহেতু $\text{Arg}(z)$ হল $\arg(z)$-এর একটা সদস্য, তাই--

THEOREM

For every $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ we have

$$\arg(z)=\{\text{Arg}(z)+2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

যদিও $\arg(z)$ হল একটা set-value function, কিন্তু $\text{Arg}(z)$ হল $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা সাধারণ function. সেই কারণে মনে হতে পারে যেন $\text{Arg}(z)$ নিয়ে কাজ করা বেশী সহজ। কিন্তু দুঃখের কথা সবসময়ে তা নয়। যেমন আমরা দেখেছি যে, $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$ হয়। কিন্তু $\text{Arg}(z_1z_2)$ আর $\text{Arg}(z_1)+\text{Arg}(z_2)$ সমান নাই হতে পারে। যেমন,

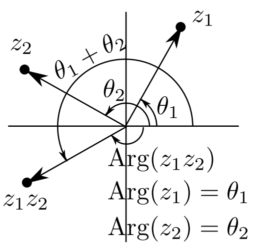


Fig 26

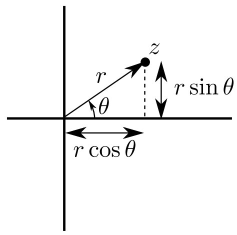


Fig 27

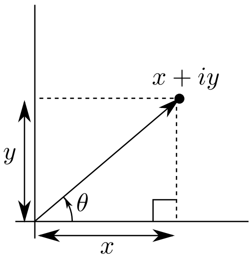


Fig 28

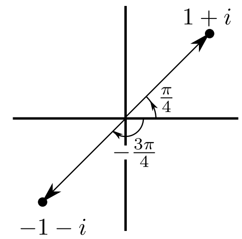


Fig 29

Fig 26-এর z_1 আর z_2-কে দ্যাখো। এখানে $\text{Arg}(z_1)+\text{Arg}(z_2)$ কিন্তু π-এর থেকে বড় হয়ে যাচ্ছে। তাই $\text{Arg}(z_1z_2)$-টা negative হয়ে যাবে। এই সমস্যাটা তেমন কিছু গুরুতর মনে নাই হতে পারে, কিন্তু অনেক সময়ে অন্য অংকের পেটের ভিতরে ঢুকে মহা ঝঞ্ঝাট বাঁধায়। এরকম উদাহরণ আমরা এই অধ্যায়ে পরে দেখব।

2.4 Cartesian বনাম polar

কোনো $z\in\mathbb{C}$ দেওয়া থাকলে তাকে দুইভাবে প্রকাশ করা শিখেছি আমরা--

- এক, real আর imaginary অংশ দিয়ে, মানে $x+iy$ আকারে লিখে (যেখানে $x,y\in\mathbb{R}$)। একে বলে **Cartesian** পদ্ধতি।

- দুই, modulus আর argument দিয়ে। একে বলে **polar** পদ্ধতি। অবশ্য এই পদ্ধতিটা $z=0$-র জন্য খাটে না, কারণ $\arg(0)$ হল undefined.

কোনো $z\neq 0$-কে polar কায়দায় দেওয়া থাকলে, মানে $|z|=r$ আর $\arg(z)$-এর কোনো সদস্য θ দেওয়া থাকলে, তা থেকে Cartesian রূপটা বার করে ফেলা খুবই সহজ (Fig 27)--

$$z=x+iy \text{ হবে যেখানে } x=r\cos\theta \text{ এবং } y=r\sin\theta.$$

এবার উল্টোদিকটা দেখি। যদি $x,y\in\mathbb{R}$ দেওয়া থাকে তবে $z=x+iy$-এর modulus বার করায় কোনোই সমস্যা নেই, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. কিন্তু সমস্যা হবে argument বার করা নিয়ে। ধরো আমরা $\text{Arg}(z)$-কে x আর y দিয়ে লিখতে চাই। যদি Fig 28-এর দিকে তাকাও, তবে মনে হবে যেন $\text{Arg}(z)$ হচ্ছে $\tan^{-1}\frac{y}{x}$. এই ফর্মুলাটা কিন্তু সব সময়ে খাটে না। তার একটা কারণ হল $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ সর্বদা $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$-এর মধ্যে থাকে, কিন্তু $\text{Arg}(z)$ নড়াচড়া করে $(-\pi,\pi]$-এর মধ্যে। একটা উদাহরণ নিলে বুঝতে সুবিধা হবে। যদি $z_1=1+i$ আর $z_2=-1-i$ নাও (Fig 29), তবে $\text{Arg}(z_1)=\frac{\pi}{4}$ আর $\text{Arg}(z_2)=-\frac{3\pi}{4}$. অথচ $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ দুই ক্ষেত্রেই $\frac{\pi}{4}$. দুঃখের কথা, x,y দেওয়া থাকলে $\text{Arg}(z)$ বার করার কোনো এক কথায় ছোট্টো ফর্মুলা নেই, কেস ধরে ধরে করতে হয়--

$$\text{Arg}(z)=\begin{cases}\tan^{-1}\frac{y}{x} & \text{if } x>0\\ \frac{\pi}{2} & \text{if } x=0,\ y>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x=0,\ y<0\\ \pi+\tan^{-1}\frac{y}{x} & \text{if } x<0,\ y\geq 0\\ -\pi+\tan^{-1}\frac{y}{x} & \text{if } x<0,\ y<0\end{cases}$$

এই বদখত জিনিসটার প্রথম তিন লাইন কী করে এল সেটা Fig 30-এ দেখানো complex সংখ্যাগুলোর Arg বার করার চেষ্টা করে বোঝা যাক। আমরা জানি $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ সর্বদা $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$-এর মধ্যে থাকে। যদি কোনো $z=x+iy$ থাকে প্রথম বা চতুর্থ quadrant-এ (ছবিতে যেমন z_1 বা z_2 রয়েছে), তবে $\text{Arg}(z)$-ও থাকবে $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$-এর মধ্যে। তাই এক্ষেত্রে $\text{Arg}(z)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ হবে। এটাই হল বদখত জিনিসটার প্রথম লাইন। যদি $\text{Arg}(z_3)$ বা $\text{Arg}(z_4)$ বার করতে চাও, তবে $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ফর্মুলাটা লাগাতেই পারবে না, কারণ ওদের real অংশ হল 0. কিন্তু দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে, $\text{Arg}(z_3)=\frac{\pi}{2}$ আর

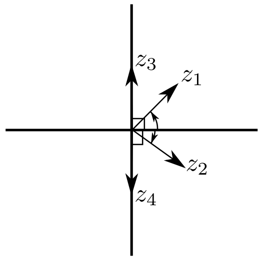


Fig 30

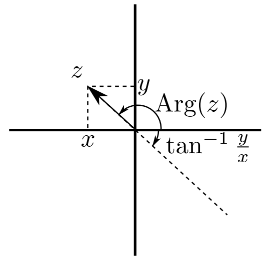


Fig 31

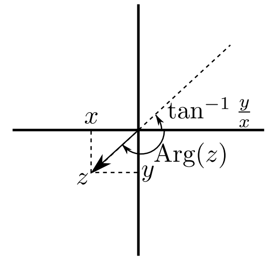


Fig 32

$\mathrm{Arg}(z_4) = -\frac{\pi}{2}$. এখান থেকেই আসছে বদখত জিনিসটার দ্বিতীয় আর তৃতীয় লাইন। Fig 31 দেখলে বুঝবে চতুর্থ লাইনটা কী করে এসেছে। এখানে z রয়েছে দ্বিতীয় quadrant-এ, তাই $\mathrm{Arg}(z)$ থাকবে $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$-এর মধ্যে। কিন্তু $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ রয়েছে $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-এর মধ্যে আটকে। তাই π যোগ করতে হচ্ছে, আর পঞ্চম লাইনটা পাবে Fig 32 থেকে। যাই হোক এই বিচ্ছিরি ফর্মুলাটা মুখস্থ করে সময় এবং মস্তিষ্কের কোষ অপব্যয় করার মানে হয় না।

2.5 Modulus-এর কিছু ধর্ম

এটা তো বোঝাই যাচ্ছে যে, $z = 0$ হলে $|z| = 0$ হবে। কিন্তু এর উল্টো দিকটাও যে সত্যি সেটা অনেক সময়েই কাজ লাগে। ধরো $z = x + iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. তাহলে $|z| = 0$ মানে $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, অর্থাৎ $x^2 + y^2 = 0$. কিন্তু x, y দুজনেই real সংখ্যা, তাই x^2 আর y^2 দুজনেই ≥ 0, অতএব ওরা পরস্পরকে কাটাকাটি করে 0 করতে পারবে না, সুতরাং $x^2 + y^2 = 0$ একভাবেই খালি হতে পারে, যদি $x = y = 0$ হয়, মানে $z = 0$ হয়।

Modulus-এর জন্য এই যে চিহ্নটা আমরা ব্যবহার করি, $|z|$ সেটা দেখতে একেবারেই real সংখ্যাদের absolute value-র চিহ্নটার মত, $|x|$. এই সাদৃশ্যের কারণ আছে। যদি $z \in \mathbb{C}$ থাকে real axis-এর উপরে (মানে $z = x + 0i$ চেহারার হয়, যেখানে $x \in \mathbb{R}$) তবে সত্যিই z-এর modulus হয় x-এর absolute value, কারণ $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$, কারণ real সংখ্যাদের বেলায় আমরা জানি যে, $\sqrt{x^2}$ মানে হল x^2-এর <u>nonnegative</u> square root. যেমন $x = -2$ নিলে $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |x|$.

এবার modulus-এর আরেকটা ধর্মের কথা বলব, যেটা অনেক সময়েই খুব কাজে আসে--

> **THEOREM**
>
> If $w, z \in \mathbb{C}$ then $|wz| = |w| \cdot |z|$. Also, if $z \neq 0$, then $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$.

প্রমাণ অতি সহজ। যেমন ধরো প্রথম অংশটা। প্রথমে w আর z-কে real এবং imaginary অংশে ভেঙে লিখে নাও, $w = a + ib$ এবং $z = c + id$, যেখানে $a, b, cd \in \mathbb{R}$. তাহলে

$$wz = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

অতএব

$$\begin{aligned} |wz| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}. \end{aligned}$$

এবার অন্যদিকটা দ্যাখো--

$$|w| \cdot |z| = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

ব্র্যাকেট তুলে গুণ করে দ্যাখো, ওই একই জিনিস আসবে। দ্বিতীয় অংশের প্রমাণটাও সহজ। প্রথমে দেখিয়ে নাও যে, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$. সেটা দেখাতে পারবে এইভাবে--

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{c+id} = \frac{c-id}{(c+id)(c-id)} = \frac{c-id}{c^2+d^2} = \frac{c}{c^2+d^2} + \frac{-id}{c^2+d^2}.$$

সুতরাং এর modulus হচ্ছে

$$\sqrt{\left(\frac{c}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{-d}{c^2+d^2}\right)} = \sqrt{\frac{c^2+d^2}{(c^2+d^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{1}{|z|},$$

ঠিক যেমনটা দরকার ছিল। এবার $\frac{w}{z}$-কে $w \times \frac{1}{z}$ বলে ভাবো, এবং প্রথম অংশটা লাগিয়ে দাও, ব্যস, দ্বিতীয় অংশটা পেয়ে যাবে।

Example 3: If $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)(x_3+iy_3) = x+iy$, show that

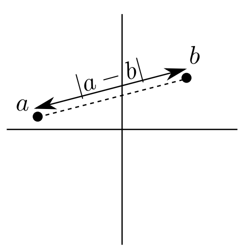
$$(x_1^2+iy_1^2)(x_2^2+iy_2^2)(x_3^2+iy_3^2) = x^2+y^2.$$

[3] **(2014.5b)**
SOLUTION: এখানে ধরে নিতে হবে যে x_i, y_i-রা সবাই real.

> We shall assume that $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ for $i = 1, 2, 3$.
> We know that if $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, then $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
> So for $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ we have
>
> $$|z_1 z_2 z_3| = |(z_1 z_2) z_3| = |z_1 z_2| \cdot |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|.$$
>
> Squaring, we have
>
> $$|z_1 z_2 z_3|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot |z_3|^2. \qquad (*)$$
>
> If we take $z_k = x_k + iy_k$ for $k = 1, 2, 3$, then $x + iy = z_1 z_2 z_3$.
> So $|z_k|^2 = x_k^2 + y_k^2$, and $|z_1 z_2 z_3|^2 = x^2 + y^2$.
> Hence the result follows from (*).

অবশ্য এই অংকটা গায়ের জোরে গুণ করেও করে ফেলা যেত। ■

Fig 33



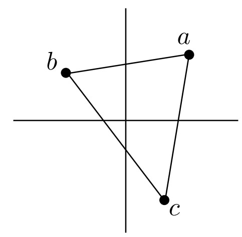


Fig 34

2.5.1 Triangle inequality

এবার modulus-এর সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ধর্মটা শিখব। Modulus-এর প্রধান প্রয়োগ হল দূরত্ব মাপা। যদি $a, b \in \mathbb{C}$ দেওয়া থাকে, তবে ওদের মধ্যে দূরত্ব হল $|a-b|$. এখানে $a-b$ হল b থেকে a পর্যন্ত তীরচিহ্ন। সেটার দৈর্ঘ্য, মানে $|a-b|$, হল ওদের মধ্যে দূরত্ব (Fig 33)। এবার ধরো তিনটে complex সংখ্যা দেওয়া আছে, মানে complex plane-এ তিনটে বিন্দু $a, b, c \in \mathbb{C}$. এদেরকে লাইন টেনে যোগ করলে একটা ত্রিভুজ পাবে (Fig 34)। আমরা জানি যে, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুটোর বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের চেয়ে বড় বা সমান হয়। তাই $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$ হবে। একে বলে **triangle inequality**. এটা খুব কাজের জিনিস, গুছিয়ে লিখে রাখি--

Triangle inequality (version 1)

If $a, b, c \in \mathbb{C}$ then $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$.
Also equality holds if and only if b lies on the line segment joining a and c.

Triangle inequality-কে আরো নানা আকারে লেখা যায়। বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন চেহারা কাজে লাগে, তাই সেগুলো শিখে রাখা ভালো। যদি $a-b$-কে z_1 আর $b-c$-কে z_2 নাম দাও, তবে $a-c$ হবে z_1+z_2. সুতরাং triangle inequality-র আরেকটা রূপ পেয়ে গেলে-- যদি $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ হয়, তবে $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ হবে। যদি এর সঙ্গে আরো একটা $z_3 \in \mathbb{C}$ জুড়ে দাও, তবে পাবে $|z_1+z_2+z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$. এ থেকেই আসে triangle inequality-এর এই চেহারাটা--

Triangle inequality (version 2)

If $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ then $|\sum_1^n z_k| \leq \sum_1^n |z_k|$.
Also equality holds if and only if all the z_i's lie on a line that passes through the origin.

এটাকে এভাবে মনে রাখতে পারো--modulus যদি sum-এর ভিতরে ঢোকে, তবে sum-টা বড় হয়ে যায়।
Triangle inequality-র আরেকটা রূপের কথা বলে শেষ করি, যেটা কিছুটা কম পরিচিত। আমরা দেখেছি $a, b, c \in \mathbb{C}$ হলে $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$ হয়। যদি $a-c$-কে z_1 আর $a-b$-কে z_2 নাম দিই, তবে $b-c$ হবে $z_1 - z_2$. সুতরাং triangle inequality-এর আরেকটা রূপ পাওয়া যাচ্ছে, $|z_1| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$ বা $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ এটা যেকোনো z_1, z_2-এর জন্য খাটে। তাই ওদের স্থানবিনিময় করলে পাই $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$. তার মানে $|z_1 - z_2|$-টা $|z_1| - |z_2|$ এবং তার negative, দুজনের থেকেই বড় (বা সমান), তার মানে $|z_1 - z_2|$-টা $|z_1| - |z_2|$-এর absolute value-র থেকে বড় (বা সমান)। অর্থাৎ--

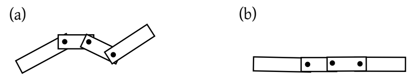


Fig 35

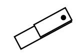


Fig 36

Triangle inequality (version 3)

If $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ then $\big|\, |z_1| - |z_2| \,\big| \leq |z_1 - z_2|$.

এখানেও আমরা equality-র জন্য শর্ত লিখতে পারতাম, তবে সেটা দেখতে একটু খটমট বলে এখানে আর লিখলাম না। Triangle inequality-র এতগুলো রূপ দেখে মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। এদেরকে মনে রাখার সহজ পথ আছে--

- প্রথম রূপটাকে এইভাবে ভাবতে পারো, $|a - c|$ হল a আর c-এর মধ্যে দূরত্ব, মানে a থেকে সোজা হাঁটতে হাঁটতে c-তে পৌঁছতে গেলে যতটা হাঁটতে হবে। আর $|a-b|+|b-c|$ হল যদি a থেকে রওনা দিয়ে b হয়ে c-তে যাও, তবে যতটা হাঁটতে হবে। সুতরাং triangle inequality-র প্রথম রূপটা বলছে যে ঘুরপথে গেলে হাঁটার পরিমাণ কখনোই কমে যেতে পারে না।

- দ্বিতীয় আর তৃতীয় সংস্করণ মনে রাখার জন্য মনে করো কয়েকটা ডাণ্ডা একটার পর একটা ঢিলে নাটবল্টু দিয়ে জুড়ে শিকলের মত করা আছে (Fig 35(a))। শিকলের দুই প্রান্তকে পরস্পরের থেকে সবচেয়ে বেশী কত দূরে নেওয়া যায়? উত্তর হল--যখন শিকলটাকে পুরো টানটান করা হবে তখন দুই প্রান্তের দূরত্ব হবে সবগুলো ডাণ্ডার দৈর্ঘ্যের যোগফল (Fig 35(b))। ডাণ্ডাগুলোকে মনে মনে তীরচিহ্ন বলে ভাবো (প্রথম ডাণ্ডাটা z_1, দ্বিতীয়টা z_2, এইরকম)। তাহলেই বুঝবে যে এটা আসলে triangle inequality-এর দ্বিতীয় রূপটাই। এবার ধরো শিকলটায় খালি দুটো ডাণ্ডা আছে। যদি জানতে চাই দুই প্রান্ত পরস্পরের কত কাছে আসতে পারে, তবে উত্তর হল যখন শিকলটাকে পুরো ভাঁজ করা হবে তখন দূরত্বটা হবে দুটো ডাণ্ডার দৈর্ঘ্যের পার্থক্য (Fig 36)। সেটাই হল triangle inequality-র তৃতীয় সংস্করণ।

2.6 কিছু ছবি আঁকার অংক

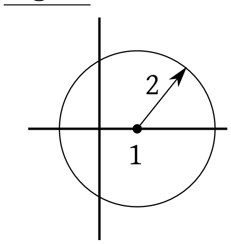
এবার কিছু অংক দেখব যাতে $\mathbb{C}$-কে ছবি দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে।

Example 4: সেই সব $z \in \mathbb{C}$ নাও যাতে $|z-1| = 2$ হয়। এদের set-টা ছবিতে দেখতে কীরকম?

SOLUTION: এখানে $|z-1|$ হল 1 থেকে z-এর দূরত্ব। সেটা যখন 2 বলে দিয়েছে, তার মানে আমরা সেইসব z-এর কথা বলছি যারা 1 থেকে 2 দূরত্বে রয়েছে। তাই set-টা হল একটা circle, যার radius হল 2 এবং centre হল 1. ছবিটা দেখিয়েছি Fig 37-এ। ■

Example 5: এই set-টা ছবিতে দেখতে কীরকম বল--

Fig 37



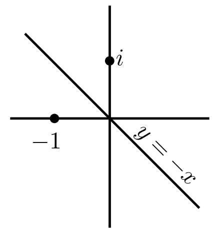


Fig 38

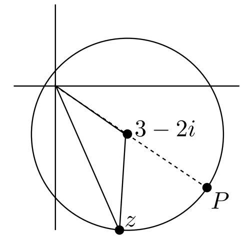


Fig 39

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - i| = |z + 1|\}.$$

SOLUTION:এরা হল সেই সব z-এর set যারা i এবং -1 থেকে সমদূরবর্তী। তাই set-টা একটা সরলরেখা যেটা i আর -1-কে যোগ করলে যে লাইনটা পাওয়া যায় তার perpendicular bisector. ছবিটা রয়েছে Fig 38-এ। যদি x, y দিয়ে লিখতে চাও তবে এই লাইনটা হল $y = -x$. ■

Exercise 1: নীচের প্রতিটা set-কে ছবি দিয়ে বর্ণনা কর--
(i) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z + i| = 1\}$, ($ii$) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |2z + i| = 5\}$, ($iii$) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |2z + i| = 2|z - i|\}$, ($iv$) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |2z + 2i| = |2iz - 10|\}$.
■

Example 6: If $|z - 3 + 2i| = 4$, then find the greatest value of $|z|$.[2] **(2016.5b)**

SOLUTION: এই অংকটায় ছবি আঁকতে বলে নি, কিন্তু ছবি দিয়ে ভাবলে মজা লাগতে পারে। $|z - 3 + 2i|$-কে ভাবো $|z - (3 - 2i)|$ হিসেবে, তাহলে সেটা হল $3 - 2i$ বিন্দু থেকে z-এর দূরত্ব। সেটা বলে দিয়েছে 4, তার মানে z বিন্দুটা $3 - 2i$-কে কেন্দ্র করে 4 radius-এর একটা circle বরাবর ঘুরতে পারে (Fig 39)। একইভাবে $|z| = |z - 0|$ হল 0 থেকে z-এর দূরত্ব। সুতরাং প্রশ্নটা হল ওই circle-এর উপর কোন বিন্দুটা 0 থেকে সবচেয়ে দূরে আছে। বুঝতেই পারছ সেই বিন্দুটা হল ছবিতে যাকে P দেখিয়েছি।
গুছিয়ে লেখার সময়ে এই ব্যাপারটাকেই triangle inequality দিয়ে করব।

> We know from triangle inequality that $|z| \leq |3 - 2i| + |z - (3 - 2i)| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} + 4 = 4 + \sqrt{13}$ and equality holds when $3 - 2i$ lies on the line segment joining 0 and z.
>
> So the greatest value of $|z|$ is $4 + \sqrt{13}$.

■

DAY 3
নানা রকম function (part 1)

এবার আমরা নানারকমের function আলোচনা করব যেগুলো একটা complex সংখ্যাকে আরেকটা complex সংখ্যাতে পরিণত করে।

এরা সকলেই আমাদের পরিচিত বিভিন্ন function-দের complex সংস্করণ।

3.1 Exponential

প্রথমেই আসে e^z-এর কথা--

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C} \tag{*}$$

এই সংজ্ঞাটা অবশ্যই আমাদের পরিচিত e^x-এর মতই, যেটা আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতেই শিখে থাকি।

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{**}$$

সে সময়ে অবশ্য আমরা ওই ডট্ ডট্গুলোর মানে পুরোপুরি বুঝি না। পরে আমরা শিখি যে ওটা আসলে একটা infinite series, যেটা সব $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই converge করে, অর্থাৎ কিনা যাই $x \in \mathbb{R}$ নাও না কেন, এমন একটা $L \in \mathbb{R}$ পাবে যাতে

$$\left| L - \left(1 + \tfrac{x}{1!} + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!}\right) \right| \to 0$$

হয়, যখন $n \to \infty$. এই L-টা অবশ্যই x-এর উপর নির্ভর করবে, এবং এটাকেই আমরা e^x নাম দিচ্ছি।

এখানেও ব্যাপারটা একইরকম, যাই $z \in \mathbb{C}$ নাও না কেন এমন $L \in \mathbb{C}$ পাবে যাতে

$$\left| L - \left(1 + \tfrac{z}{1!} + \tfrac{z^2}{2!} + \cdots + \tfrac{z^n}{n!}\right) \right| \to 0$$

হয়, যখন $n \to \infty$. এই L-টা অবশ্যই z-এর উপর নির্ভর করবে, এবং একেই আমরা e^z নাম দিচ্ছি। খালি একটা পার্থক্যের কথা মনে রেখো--$\mathbb{R}$-এর বেলায় আমরা যেখানে absolute value ব্যবহার করেছিলাম, $\mathbb{C}$-এর বেলায় সেই জায়গায় modulus এসেছে।

এখানে (*) আর (**)-এর সাদৃশ্য থেকেই বুঝবে যে, যদি $z \in \mathbb{C}$ আসলে একটা real সংখ্যা হয় (মানে $z = x + 0i$ আকারের হয়, যেখানে $x \in \mathbb{R}$), তবে e^z আমাদের পরিচিত e^x-এই পরিণত হবে। (**)-এর আরেকটা ধর্মও (*)-এর বেলায় আছে, সেটা হল absolute convergence. অর্থাৎ শুধু যে (**)-টা converge করে তাই নয়, যদি (**)-এর প্রতিটা term-এর absolute value নাও তবে সেই নতুন series-টাও converge করে--

$$1 + \left|\tfrac{x}{1!}\right| + \left|\tfrac{x^2}{2!}\right| + \cdots.$$

একইভাবে (*)-ও absolutely converge করে, মানে এই infinite series-টাও converge করে--

$$1 + \left|\tfrac{z}{1!}\right| + \left|\tfrac{z^2}{2!}\right| + \cdots.$$

বলাই বাহুল্য যে, এখানেও আমরা absolute value-র জায়গায় modulus নিয়েছি। এই convergence-টা কেন হয়, সেটা অবশ্যই দেখা খুবই সহজ, যদি $x = |z|$ নাও, তবে এই infinite series-টা আসলে (**)-এ পরিণত হয়।

এখানে আমরা absolutely convergence নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছি কারণ সেরকম দুটো series-কে গুণ করার একটা কায়দা আছে--

Cauchy product formula

If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ are absolutely convergent, then

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum c_n,$$

where

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

এটা প্রমাণ করা মোটেই কঠিন কিছু নয়, যদিও আমরা এখানে প্রমাণ করার দিকে এগোব না। আমরা এটা ব্যবহার করে দেখাব যে--

Theorem

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

Proof:

> We know $e^a = \sum \frac{a^n}{n!}$ and $e^b = \sum \frac{b^n}{n!}$ are absolutely convergent.
>
> So, by the Cauchy product formula, $e^a e^b = \sum_0^{\infty} c_n$, where
>
> $$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!},$$
>
> by the binomial theorem.
>
> So $e^a e^b = \sum_0^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}$, as required.

[Q.E.D]

যদি তোমাকে $x = 2$ দিয়ে e^x বার করতে দিতাম, তবে ক্যালকুলেটর ছাড়া গত্যন্তর ছিল না। কিন্তু যদি $z = 1 + 2i$ দিয়ে e^z বার করতে বলি, তবে ক্যালকুলেটর দিয়েই বা কী করে করবে? সৌভাগ্যক্রমে Euler (অয়লার) একটা চমৎকার ফর্মুলা দিয়ে গেছেন, যাতে আমাদের ক্যালকুলেটর দিয়েই e^z বার করতে পারি। এইবার সেটা শিখব।

3.1.1 Euler's formula

প্রথমেই একটা ছোট্টো ব্যাপারের দিকে দৃষ্টি আকর্ষণ করি। আমরা জানি addition হল associative এবং commutative, অর্থাৎ কিছু সংখ্যা যোগ করলে তাদেরকে যেভাবে খুশি আগে পরে যোগ করলেও উত্তরটা একই আসে, যেমন $a_1+a_2+a_3+a_4 = (a_1 + a_3) + (a_2 + a_4)$. দুঃখের কথা যে, infinite series-দের বেলায় এমনটা নাও হতে পারে। যেমন ধরো

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - + - \cdots$$

দেখাই যাচ্ছে যে oscillate করে (কারণ partial sum-গুলো $1, 0, 1, 0, \ldots$ এইভাবে ওঠানামা করতে থাকে)। কিন্তু যদি ওদেরকে এইভাবে যোগ করো--

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

(মানে এখানে প্রতিটা term-ই হল $(1-1)$), তবে কিন্তু series-টা চমৎকার 0-তে converge করে যায়। তাহলেই বোঝো infinite series-দের বেলায় term-গুলোকে কাকে আগে পরে নিচ্ছ, তার উপর নির্ভর করে উত্তরটা বদলে যাচ্ছে। সৌভাগ্যক্রমে, যদি infinite series-টা absolutely convergent হত, তবে কিন্তু কে আগে কে পরে তাতে কিছুই এসে যেত না। সেই কারণে absolutely convergent series-দের নিয়ে কাজ করা অনেক সহজ। আমরা জানি যে, e^z-এর series-টা ঠিক এরকম একটা series. সেই কথাটা এক্ষুণি কাজে লাগাব।

Euler's formula

For any $x \in \mathbb{R}$ we have

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

এটার প্রমাণ অবশ্যই খুবই সহজ। খালি মনে রাখতে হবে যে, যেকোনো $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + - + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + - + \cdots\end{aligned}$$

এবার e^{ix}-কে বড় করে লিখে নাও--

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$

মনে রেখো যে, $i^2 = -1$ হওয়ায় যেখানে i-এর even power থাকবে সেখানে আসলে i থাকবে না, যেমন $i^{2n} = (-1)^n$. ফলে পাবে--

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

এবার আমরা i-ওয়ালা term-গুলোকে এক জায়গায় জড়ো করব, আর i-ছাড়া term-গুলোকে আরেক জায়গায়। এর ফলে infinite series-টার যোগফল মোটেই বদলাবে না, কারণ series-টা absolutely convergent. ভালো করে তাকিয়ে দ্যাখো, i-ছাড়া জিনিসগুলোকে জড়ো করলেই $\cos x$ পাবে, আর i-ওয়ালা জিনিসগুলো থেকে পাবে $i \sin x$. ব্যস্, প্রমাণ হয়ে গেল!

Example 7: Euler's formula ব্যবহার করে e^z বার করো যেখানে $z = i\pi/2$.

SOLUTION: $e^z = e^{0+i\pi/2} = e^0 \cdot e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i.$ ■

Euler's formula-র বিস্তর প্রয়োগ আছে। তার মধ্যে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ হল e^z-কে polar form-এ লেখা, মানে modulus আর argument দিয়ে লেখা--

THEOREM

Let $z = x + iy$ where $x, y \in \mathbb{R}$. Then e^z has modulus e^x. Also, y is one value of $\arg(e^z)$.

Proof: প্রমাণটা খুবই সহজ। আমরা জানি যে, কোনো complex সংখ্যার modulus যদি $r > 0$ আর argument-এর একটা value যদি θ হওয়া মানে তাকে $r\cos\theta + i\sin\theta$ আকারে লিখতে পারা। এদিকে Euler's formula বলছে যে

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

এর সঙ্গে $r\cos\theta + ir\sin\theta$ চেহারাটা তুলনা করে দেখা যাচ্ছে যে $r = e^x$ এবং $\theta = y$ নেওয়া যায়। **[Q.E.D]**

এই কারণে অনেক সময়েই আমরা কোনো $z \in \mathbb{C}$-এর জন্য

> "Let r be the modulus of z, let θ be an argument of z"

না লিখে সংক্ষেপে লিখে দিই--

> "Let $z = re^{i\theta}$".

Example 8: Solve for x :

$$(\cos x + i\sin x)(\cos 2x + i\sin 2x)\cdots(\cos nx + i\sin nx) = -i,$$

where n is any positive integer.[2] **(2009.1gii)**
SOLUTION: এখানে বলে দেয় নি x কোথায় আছে $\mathbb{R}$-এ নাকি $\mathbb{C}$-তে। আমরা এখানে $x \in \mathbb{R}$ ধরেই অংকটা করব। যদি $x \in \mathbb{C}$ হয়, তবে কী করে করতে হয়, সেটা পরে বলব, যখন complex trigonometric function শেখা হয়ে যাবে।

> By Euler's formula we have $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.
> So the given equality is
>
> $$\begin{aligned} & e^{ix}e^{2ix}\cdots e^{nix} = -i, \\ \iff\quad & \exp(1+2+\cdots+n)ix) = -i, \\ \iff\quad & e^{\frac{n(n+1)}{2}iz} = -i \\ \iff\quad & \frac{n(n+1)}{2}x \in \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}, \quad [\because -i = e^{-i\pi/2}] \\ \iff\quad & \frac{n(n+1)}{2}x \in \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}, \\ \iff\quad & x \in \{(\frac{(4k-1)\pi}{n(n+1)}) \;:\; k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Fig 40

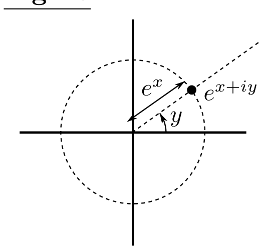
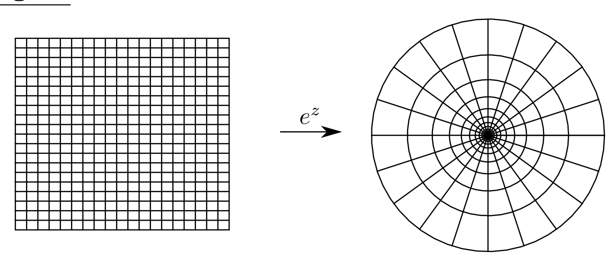


Fig 41



■

3.1.2 গ্রাফ আঁকা

Real analysis শেখার সময়ে বিভিন্ন function-এর গ্রাফ এঁকে নিতে পারলে খুব সুবিধা হয়। Complex analysis-এর বেলায় সে সুবিধাটা একটু কম। কারণটা বোঝা কঠিন নয়-- $\mathbb{R}$-কে একটা লাইন বলে ভাবা যায়, তাই $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ হলে $y=f(x)$-এর গ্রাফ আঁকতে দুটো লাইন (মানে axis) লাগে, একটা x-এর জন্য, অন্যটা y-এর জন্য। কিন্তু $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ হলে $w=f(z)$-এর গ্রাফ আঁকতে একটা গ্রাফ কাগজে কুলোবে না, দুটো লাগবে। খালি z-কে আঁকতেই একটা গ্রাফ কাগজ লাগবে, আর w-কে আঁকতে লেগে যাবে অন্যটা। তাই complex function-দের গ্রাফ আঁকা সবসময়ে সহজ নয়। কিন্তু কোনো কোনো ক্ষেত্রে কাজটা সহজেই করা যায়, যেমন e^z-এর বেলায়। ব্যাপারটা ধাপে ধাপে বোঝা যাক।
যদি $z=x+iy$ হয় $(x,y\in\mathbb{R})$, তবে আমরা জানি যে, e^z এমন একটা complex সংখ্যা, যার modulus হল e^x আর argument-এর একটা value হল y. সুতরাং ছবিতে দেখাবে Fig 40-এর মত। যদি y স্থির রেখে x বদলাও, তবে বিন্দুটা ওই ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন বরাবর নড়াচড়া করবে। আবার যদি x স্থির রেখে y বদলাও তবে বিন্দুটা ওই ড্যাশ্ ড্যাশ্ circle বরাবর নড়বে। সুতরাং--

- যদি $\mathbb{C}$-এর মধ্যে কোনো horizontal লাইন নাও (মানে real axis-এর সঙ্গে parallel) তবে e^z লাগালে সেটা পরিণত হবে ড্যাশ্ ড্যাশ্ সরলরেখাটায়।
- একইভাবে $\mathbb{C}$-এর মধ্যে যেকোনো vertical লাইন (মানে imaginary axis-এর সঙ্গে parallel) লাইন নিলে সেটা e^z লাগানোর পর হয়ে যাবে ওই ড্যাশ্ ড্যাশ্ circle-টা।

সুতরাং e^z-কে মনে করতে পারো যেন Fig 41-র মত, চৌকোণা সতরঞ্চিটাকে গোল আল্পনায় পরিণত করে।

3.1.3 de Moivre's theorem

এবার আমরা Euler's formula-র আরেকটা প্রয়োগ দেখব, de Moivre's theorem. উচ্চারণটা হল ডি ময়ভার।

Example 9: State de Moivre's theorem for complex numbers.[1] **(2010.1iIII)**

SOLUTION:

> **de Moivre's theorem**
>
> For any $x\in\mathbb{R}$ and $n\in\mathbb{Z}$
>
> $$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx.$$

এর প্রমাণটা এখানে চায় নি। কিন্তু Euler's formula লাগালে এর প্রমাণ এক লাইনেই হয়ে যায়। এখানে LHS-কে Euler's formula দিয়ে লেখা যায় $(e^{ix})^n=e^{inx}$, যাকে আরেকবার Euler's formula লাগিয়ে লেখা যায় $\cos nx+i\sin nx$. ব্যস্! ■

Example 10: Expand $\sin^5\theta$ in a series of sines of multiples of θ.[3] **(2012.7i)**

SOLUTION:

Let $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Then, by de Moivre's formula,

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

প্রশ্নটা খালি sin নিয়ে, তাই cos-টাকে তাড়াতে হবে--

So

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z^n - z^{-n} = (\cos n\theta + i\sin n\theta) - (\cos n\theta - i \sin n\theta) = 2i \sin n\theta. \qquad (*)$$

এবার $\sin^5\theta$-কে লিখব। প্রথমে $\sin\theta$ দিয়ে শুরু করি--

For $n = 1$

$$2i\sin\theta = z - \frac{1}{z},$$

So

$$\begin{aligned} & 32i\sin^5\theta \\ = & \left(z - z^{-1}\right)^5 \\ = & \binom{5}{0} z^5 + \binom{5}{1} z^4 \left(-\tfrac{1}{z}\right)^1 + \binom{5}{2} z^3 \left(-\tfrac{1}{z}\right)^2 + \binom{5}{3} z^2 \left(-\tfrac{1}{z}\right)^3 + \binom{5}{4} z^1 \left(-\tfrac{1}{z}\right)^4 + \binom{5}{5} \left(-\tfrac{1}{z}\right)^5 \end{aligned}$$

এখানে আমরা binomial theorem লাগালাম,
মানে $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}b^n$.

$$\begin{aligned} = & z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^5 \\ = & (z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1}) \\ = & 2i(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta), \end{aligned}$$

by (*). Hence

$$\sin^5\theta = \frac{1}{16}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta).$$

■

Example 11: Use de Moivre's theorem to show that for integral values of n,

$$\alpha^n + \beta^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4},$$

where α, β are the roots of $x^2 - 2x + 2 = 0$. Hence obtain the sum of the 4-th powers of the roots.[5] **(2008.4c)**

SOLUTION:

Solving $x^2 - 2x + 2 = 0$ we get the roots $1 \pm i$.

Let us take, w.l.g., $\alpha = 1 + i$ and $\beta = 1 - i$.

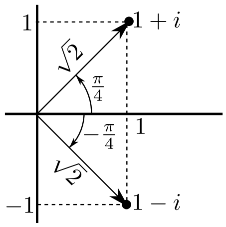


Fig 42

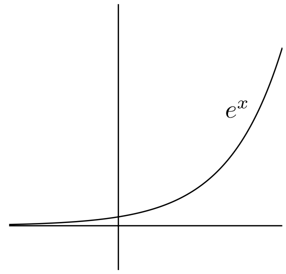


Fig 43

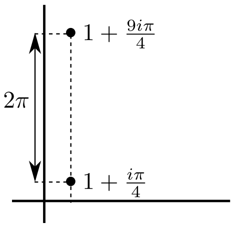


Fig 44

∎

এখানে w.l.g. (অর্থাৎ without loss of generality) বলার কারণ হল, কোনটাকে α আর কোনটাকে β বলছি, তাতে কিছু আসে যায় না।

> Then both α and β have modulus $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.
> Also, $\frac{\pi}{4}\in\arg(\alpha)$ and $-\frac{\pi}{4}\in\arg(\beta)$.

এইটা পেলাম ছবি দিয়ে চিন্তা করে (Fig 42)।

> So $\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ and $\beta=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
> Hence, by de Moivre,
> $$\alpha^n=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}$$
> and
> $$\beta^n=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}.$$
> So
> $$\alpha^n+\beta^n=2^{\frac{n}{2}}\times 2\cos\frac{n\pi}{4},$$
> completing the proof.
> Taking $n=4$, we get
> $$\alpha^4+\beta^4=2^3\cos\pi=-8.$$

■

3.1.4 One-one নয়, কিন্তু প্রায় onto

ধরো $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ নিলাম, $f(x)=e^x$. তবে ওর গ্রাফ (Fig 43) দেখলেই বোঝা যায় যে, $f(x)$ হল one-one, মানে এমন কোনো horizontal লাইন আঁকতে পারবে না, যেটা গ্রাফটার গায় একাধিক জায়গায় লাগে। গ্রাফ থেকে আরো দেখা যায় যে, $f(x)$ মোটেই onto নয়, কারণ e^x কখনো <0 হতে পারে না। কিন্তু যাই $a>0$ দাও, এমন একটা $b\in\mathbb{R}$ পাবে, যাতে $a=e^b$ হয়।
কিন্তু যদি $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ নাও, $g(z)=e^z$, তবে $g(z)$-এর বেলায় ধর্মগুলো অনেকটাই আলাদা--$g(z)$ মোটেই one-one নয়, কিন্তু প্রায় onto. এই "প্রায় onto"-র গল্পটা কী সেটা একটু পরেই বলছি, আগে one-one নয় কেন দেখি।

Example 12: z-এর দুটো value দিচ্ছি, $z_1=1+i\frac{\pi}{4}$ আর $z_2=1+i\frac{9\pi}{4}$. এদের দুজনের জন্য e^z বার করো।

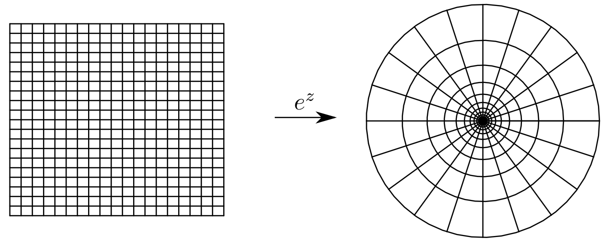


Fig 45

Fig 44 দেখে নাও।

SOLUTION: $e^{z_1} = e^{1+i\pi/4} = e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(1+i)e}{\sqrt{2}}$.

আবার

$e^{z_2} = e^{1+i9\pi/4} = e\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) = e\left[\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{(1+i)e}{\sqrt{2}}$. ■

লক্ষ করো যে, $z_1 \neq z_2$ হওয়া সত্ত্বেও $e^{z_1} = e^{z_2}$ হয়ে গেল। আমরা জানি যে, $\sin x$ আর $\cos x$ হল periodic function, যাদের period হল 2π. সেই কারণ যাই complex সংখ্যা $x + iy$ নাও (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$), আর যাই $n \in \mathbb{Z}$ নাও, সব সময়েই $e^{x+iy} = e^{x+i(y+2n\pi)}$ হবে। এই ব্যাপারটা e^z-এর গ্রাফ থেকেও বোঝা যায়। আমরা আগেই দেখেছিলাম (Fig 45-এ আরেকবার দেখালাম) যে, vertical লাইনগুলো e^z লাগালে circle হয়ে যায়। যেই কোনো vertical লাইন বরাবর 2π দূরত্ব যাবে, অমনি circle-টার পুরো এক চক্কর শেষ হয়ে ফের আগের জায়গাতেই ফিরে আসবে।

এবার সেই "প্রায় onto"-র প্রসঙ্গে আসি। আমাদের $g(z) = e^z$ আসলে $\mathbb{C}$-এর সব value-ই নিতে পারে, খালি একটা ব্যতিক্রম বাদে, সেটা হল 0. এটা আমরা এক্ষুণি গুছিয়ে লিখে প্রমাণ করব, আগে একটা উদাহরণ দেখাই। আমরা real সংখ্যাদের বেলায় জানি যে, e^x কখনোই -1 হতে পারে না। কিন্তু $e^z = -1$ হতেই পারে, যেমন

$$e^{i\pi} = -1.$$

এটা প্রমাণ করা অতি সহজ, Euler's formula লাগালেই হল (করেই দ্যাখো!)।

বিখ্যাত পদার্থবিজ্ঞানী Feynman (ফেইনম্যান) নাকি বলেছিলেন যে, এই জিনিসটা হল অংকের দুনিয়ার সবচেয়ে আশ্চর্য জিনিস। সত্যিই তো, কোথায় ছিল e, কোথায় ছিল π আর কোথায়ই বা ছিল i. একেবারে তিনটে আলাদা জগতের জিনিস এরা। অথচ তিন জনে কেমন মিলেমিশে হয়ে গেল -1.

বিরিয়ানি কোর্মা পটলের দোর্মা
মিলেমিশে হয়ে যায় প্যারিসের ছেঁচকি।
--

শুধু -1-ই নয়, বস্তুতঃ যাই complex সংখ্যা $w \neq 0$ দাও না কেন, অমনি তার জন্য এমন একটা $z \in \mathbb{C}$ পেয়ে যাবে যাতে $e^z = w$ হয়। ব্যাপারটা দরকারী, গুছিয়ে লিখে রাখা যাক।

> THEOREM
>
> e^z cannot take the value 0. However, it can take every nonzero value in $\mathbb{C}$.

Proof: প্রথমে দেখাব যে e^z কখনোই 0 হতে পারে না, মানে--

◎ $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0.$

যারা আমাদের "বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই" সিরিজের অন্যান্য বই পড়েছ, তারা ওই গোল ◎-এর মানেটা জানো। বাকিদের বলে রাখি, ওটা আমরা এই বইগুলোতে ব্যবহার করি target বোঝাতে, মানে ওই চিহ্নটার পরে অংকের ভাষায় যেটা লেখা

আছে, সেটা দেখানোই আমাদের লক্ষ্য। এইভাবে লিখে নেওয়াটা বোকা-বোকা লাগতে পারে, কিন্তু অনেক ছাত্রছাত্রীকেই দেখেছি প্রমাণের মাঝপথে হঠাৎ খেই হারিয়ে ভাবতে বসে--"এই যাঃ কী যেন প্রমাণ করার কথা ছিল!" তার প্রতিষেধক হিসেবেই নাকের ডগায় target-টাকে সাইনবোর্ডের মত লটকে দিয়েছি। এই target-এ যার পরে যা আছে, আমাদের প্রমাণ সেই মত এগোবে। যেমন এখানে গোড়াতেই আছে $\forall z \in \mathbb{C}$, তাই প্রমাণ শুরু হবে যা খুশি একটা $z \in \mathbb{C}$ নিয়ে--

$\boxed{\forall z}$ Take any $z \in \mathbb{C}$.

এরপর target-এর আছে $e^z \neq 0$, তাই আমরা পরীক্ষা করতে বসব যে আমাদের z-এর জন্য এই কথাটা খাটে কিনা। সেই পরীক্ষার চিহ্ন হল নীচের আতসকাঁচটা--

Let $z = x + iy$, where $x, y \in \mathbb{R}$.
Then, by Euler's formula, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. So
$|e^z| = e^x(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^x > 0$.
Hence $e^z \neq 0$, as required.

এবার দেখাব যে, যাই complex সংখ্যা $w \neq 0$ দাও না কেন, এমন $z \in \mathbb{C}$ পাবে যাতে $e^z = w$ হয়, অর্থাৎ--

$\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \exists z \in \mathbb{C} \quad e^z = w$.
$\boxed{\forall w}$ Take any $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Let $r = |w| > 0$ and let $\theta \in \arg(w)$.
Then $w = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$.
Also let $s = \log r$. Then $r = e^s$.
So $w = e^s e^{i\theta} = e^{s+i\theta}$.
$\boxed{\exists z}$ Choose $z = s + i\theta \in \mathbb{C}$.
Then clearly $e^z = w$, as required.

[Q.E.D]

দ্যাখো তো, এই একই কায়দায় নীচের অংক কটা করতে পারো কিনা।

Example 13: Find all the complex numbers z such that $e^z = -i$.[2] **(2011.5i)**

SOLUTION: এই অংকের নতুনত্ব হল, এখানে এরকম <u>যাবতীয়</u> z বার করতে বলেছে, খালি একটা নয়।

Given $e^z = -i$,

দুটো complex সংখ্যা কখন সমান হয়? যখন ওদের modulus এবং argument দুটোই সমান হয়--

ie, $|e^z| = |-i|$ and $\arg(e^z) = \arg(-i)$.

প্রথমে e^z-এর modulus আর argument বার করা যাক--

> Now, if $z = x + iy$, where $x, y \in \mathbb{R}$, we have $|e^z| = e^x$ and $\arg(e^z) = \{y + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$.

এবার $-i$-এর modulus আর argument--

> Also, $|-i| = 1$ and $\operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$. So $\arg(-i) = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Modulus দুটো সমান করে পাচ্ছি--

> So we have $e^x = 1$ or $x = 0$.

Argument দুটো সমান করলে আসে--

> Also $y = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$.

এই ধাপটা ভালো করে বুঝে নাও। যাবতীয় $y + 2n\pi$ জাতীয় সংখ্যার set আর $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ জাতীয় সংখ্যার set সমান হওয়া মানে y নিজেই $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ জাতীয় কোনো সংখ্যা।

> Thus, by Euler's formula, the set of all solutions is $\left\{\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$.

■

Exercise 2: এমন $z \in \mathbb{C}$ বার করো যাতে $e^z = 1 + i$ হয়।
■

DAY 4
নানা রকম function (part 2)

4.1 Logarithm

যদি $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $e^a = b$ হয়, তবে আমরা লিখি $a = \log b$. সেটা মনে আছে নিশ্চয়ই? একইরকম কাজ complex সংখ্যাদের বেলাতেও করা হয়। যদি $w, z \in \mathbb{C}$ এবং $e^z = w$ হয় তবে আমরা বলব $w = \log z$.

Example 14: $\log(1 + i)$ বার করো।

SOLUTION: এখানে সেইসব যাবতীয় z চাওয়া হচ্ছে, যাতে $e^z = 1 + i$ হয়।
ধরো $z = x + iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. তাহলে $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. সুতরাং দেওয়া আছে যে

$$e^x(\cos y + i \sin y) = 1 + i.$$

দুই দিকের modulus নিলে পাই $e^x = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. সুতরাং $x = \log\sqrt{2}$ হতে বাধ্য।
আবার argument নিলে দেখা যাচ্ছে যে, y হবে $1 + i$-এর একটা argument. আমরা জানি $\arg(1 + i) = \left\{\frac{\pi}{4} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$. সুতরাং y সম্পর্কে এটুকুই খালি বলা যায়, সেটা এই set-এর কোনো সদস্য। তাই আমরা লিখব--

$$\log(1 + i) = \left\{\log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

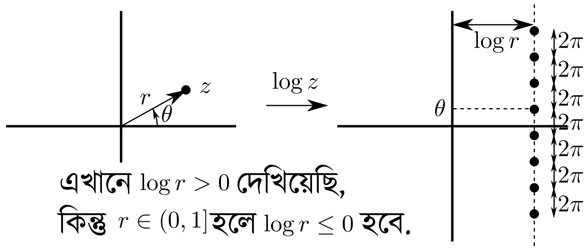


Fig 46

■

একই যুক্তিতে, যদি কোনো $z \neq 0$ দেওয়া থাকে যার modulus ধরো r, আর argument-এর একটা value হল θ, তবে $\log z$ হবে

$$\log z = \{\log r + i(\theta + 2n\pi) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

ছবিতে দেখতে Fig 46-এর মত। লক্ষ কর, $\log z$ একটা set, যার প্রতিটা সদস্যই একই vertical লাইনে আছে, 2π দূরত্ব অন্তর অন্তর।
এটা গুছিয়ে লিখে রাখি--

Definition: Logarithm

For $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ we define complex logarithm of z as

$$\log z = \log |z| + i \arg(z).$$

This is a set-valued function. The $\log |z|$ in the RHS is the real logarithm.

এইখানে একটা বিশ্রী অসুবিধার কথা বলে রাখি। আমরা e^z-এর বেলায় দেখেছিলাম যে, যদি $z = x + 0i$ আকারের হলে (যেখানে $x \in \mathbb{R}$), হয়, তবে e^z আমাদের পরিচিত e^x-এ পর্যবসিত হয়। কিন্তু $\log z$ কিন্তু মোটেই $\log x$-এ পরিণত হয় না। যেমন ধরো যদি তোমাকে $\log e$ বার করতে বলি, তবে real logarithm-এর বেলায় উত্তর হবে 1. কিন্তু complex logarithm-এর বেলায় উত্তর হবে $1 + i\arg(e) = 1 + i\{2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$. অথচ দ্যাখো, খালি $\log e$ লিখলে মোটেই বোঝার উপায় নেই real logarithm-এর কথা হচ্ছে নাকি complex logarithm-এর কথা! এটা সত্যিই একটা বিচ্ছিরি notation-ঘটিত সমস্যা। তাই যদি কখনো দ্যাখো যে কেউ complex analysis-এর বইতে $\log x$ লিখেছে, তবে সতর্ক থেকো। কোন্ প্রসঙ্গে $\log x$-এর কথাটা আসছে তা থেকে বুঝে নিতে হবে কোন্ ধরণের logarithm-এর কথা হচ্ছে, real নাকি complex !
আমরা real logarithm-এর বেলায় জানি যে, $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2$ যেখানে $x_1, x_2 > 0$. একইরকম জিনিস হয় complex logarithm-এর বেলাতেও। সেটাই নীচের অংকটার বক্তব্য।

Example 15: Prove that $\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2)$, where z_1, z_2 are two non-zero distinct complex numbers. [2] **(2011.6p2)**

Solution: প্রথমেই বলে রাখি যে, এখানে z_1 আর z_2-র distinct হওয়ার কোনো দরকার নেই।

> For $z \neq 0$ we have $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$, where $\arg(z)$ is the set of all possible arguments of z, and the $\log$ in the RHS is the real logarithm.

অতএব $\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2)$ দেখানো মানে হল--

> To show: $\log|z_1| + \log|z_2| = \log|z_1 z_2|$ and $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2)$.
> Since $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, hence, by property of real logarithm, $\log|z_1 z_2| = \log(|z_1| \cdot |z_2|) = \log|z_1| + \log|z_2|$.
> Also, from standard property of argument, we know
>
> $$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2).$$
>
> Hence the result.

■

এই অংকে একটা বাড়তি শর্ত দিয়েছিল $z_1 \neq z_2$. এটা আমাদের কাজে লাগে নি। যদি $z_1 = z_2$ হয় (ধরো তখন ওদেরকে আর আলাদা নামে না ডেকে z বললাম), তবে পাবে

$$\log z^2 = \log z + \log z.$$

এতে কোনো ভুল নেই। কিন্তু আর এক পা অসাবধানে এগোলেই তুমি একটা ভুলের মধ্যে গিয়ে হুড়মুড়িয়ে পড়বে। ভুলেও যেন RHS-টাকে $2\log z$ লিখে ফেলো না। সেটা মোটেই ঠিক নয়। কেন ঠিক নয়, সেটা আমরা আগেই একবার বলেছিলাম, যদি $A \subseteq \mathbb{C}$ হয় তবে $A + A$ আর $2A$ একই জিনিস নয়। $A + A$ হল A-র সব সদস্যর সাথে সব সদস্যকে যোগ করে পাওয়া, আর $2A$ হল সব সদস্যর সাথে খালি নিজেকেই যোগ করে পাওয়া। নীচের অংকটা এই জিনিসটাকেই একটা উদাহরণ দিয়ে বিশদ করেছে।

Example 16: Show that each value of $2\log i$ is a value of $\log i^2$ but not conversely.[2] **(2015.5b)**

SOLUTION:

> We know $|i| = 1$ and $\arg(i) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{(4n+1)\pi}{2} \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$.
> So $\log i = \log|i| + i\arg(i) = i\left\{\frac{(4n+1)\pi}{2} \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$.
> Hence $2\log i = i\{(4n+1)\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$.
> Also $i^2 = -1$, and $|-1| = 1$ and $\arg(-1) = \{\pi + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\} = \{(2n+1)\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$.
> So $\log i^2 = \log|-1| + i\arg(-1) = i\{(2n+1)\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$.

এবার দেখাব যে, $2\log i \subseteq \log i^2$.

> If $a \in 2\log i$, then $a = (4n+1)\pi i$ for some $n \in \mathbb{Z}$.
> Hence $a = (2m+1)\pi i$ for $m = 2n \in \mathbb{Z}$.
> So $2\log i \subseteq \log i^2$.

কিন্তু $\log i^2 \not\subseteq 2\log i$.

> But $3\pi i \in \log i^2$ and $3\pi i \notin 2\log i$.
> Hence $\log i^2 \not\subseteq 2\log i$.

■

Exercise 3: Show that $\log i^2 \neq 2\log i$.[2] **(2010.1di)**
HINT:
আগের অংকের শেষের অংশটুকু করে দিলেই হবে। ■

4.1.1 Principal branch of logarithm

আমরা দেখলাম যে--

$$\log z = \log|z| + i\arg(z)$$

মনে রেখো যে, $\arg(z)$ একটা set-valued function, তাই $\log(w)$-ও একটা set-valued function. তবে যদি $\arg(z)$-এর জায়গায় $\text{Arg}(z)$ নাও, তবে একটা সাধারণ function পাবে, যেটাকে লোকে লেখে Log $: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ এবং মুখে বলে **principal branch of logarithm**. লক্ষ করো এখানে Log -এর 'L'-টা বড় হাতের।

Example 17: Define Log z, where z is a complex number.[1] **(2011.6p1)**

SOLUTION:

> DEFINITION: **Principal branch of logarithm**
>
> For any complex $z \neq 0$ we define
>
> $$\text{Log }(z) = \log|z| + i\text{Arg}(z),$$
>
> where log is the real logarithm, and $\text{Arg}(z)$ is the principal argument of z satisfying $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$.

■

হাতেকলমে একটা অংক করে দেখে নেওয়া যাক।

Example 18: Find Log z, where $z = -i$.[2] **(2012.7ii)**

SOLUTION:

> Here $|z| = |-i| = 1$ and $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$.
> So $\text{Log }(z) = |z| + i\text{Arg}(z) = 1 - \frac{i\pi}{2}$.

■

Log (z)-এর বিষয়ে কয়েকটা সাবধান বাক্য বলে রাখি--

- $z = \text{Log}\, w$ হলে, অবশ্যই $e^z = w$ হবে। কিন্তু $e^z = w$ হলেই যে $z = \text{Log}\, w$ হবে এমন কোনো স্থিরতা নেই। যেমন $e^{2\pi i} = 1$ কিন্তু $\text{Log}\ 1 = 0 \neq 2\pi i$.
- এমন $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ থাকতেই পারে যাতে $\text{Log}\ (z_1 z_2)$ আর $\text{Log}\ (z_1) + \text{Log}\ (z_2)$ সমান নয়! এটা অবশ্য খুব একটা অপ্রত্যাশিত নয়, কারণ আমরা আগেই দেখেছি যে, $\text{Arg}(z_1 z_2)$ এবং $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ সমান নাই হতে পারে। এইটা নিয়েই পরের অংকটা।

Example 19: Prove that $\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2)$, where z_1, z_2 are two non-zero distinct complex numbers. Is it always true that $\text{Log}\ z_1 + \text{Log}\ z_2 = \text{Log}\ (z_1 z_2)$, where $\text{Log}\ z$ is the principal branch of $\log z$? Justify your answer.[2+2] **(2011.6p2)**

SOLUTION: প্রথম অংশ তো একটু আগেই করলাম। এবার দ্বিতীয় অংশ--

> If we take $z_1 = e^{-2\pi i/3}$ and $z_2 = e^{-\pi i/3}$, then $z_1 z_2 = e^{-i\pi} = -1$.
> Now, $\text{Arg}(z_1) = -\frac{2\pi}{3}$ and $\text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{3}$, and $\text{Arg}(z_1 z_2) = \pi$.
> So $\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$.

এদিকে $\text{Log}\ z$-এর imaginary অংশটাই তো $\text{Arg}(z)$. সুতরাং Arg-গুলো যদি যোগ না হয়, তবে Log -গুলো আর যোগ হয় কী করে?

> Hence $\text{Log}\ z_1 + \text{Log}\ z_2 \neq \text{Log}\ (z_1 z_2)$, since for any $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ we have $\text{Im}(\text{Log}\ (z)) = \text{Arg}(z)$.

■

Example 20: Show that $\text{Log}\ (1+i)^3 \neq 3\text{Log}\ (1+i)$.[3] **(2013.5b)**

HINT: অংকটা ভুল। কষলেই দেখবে যে LHS আর RHS সমান হয়ে যাচ্ছে। ■

এবার একটা সামান্য খটমট অংক।

Example 21: If x is real, prove that

$$i \log \frac{x-i}{x+i} = \begin{cases} \pi - 2\tan^{-1} x & \text{if } x > 0 \\ -\pi - 2\tan^{-1} x & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

[5] **(2009.1d)**

SOLUTION: এই অংকটায় একটা ভুল রয়েছে। LHS-এ রয়েছে log, যেটা একটা set-valued function, অথচ RHS-এ রয়েছে খালি একটা complex সংখ্যা। সম্ভবতঃ এখানে log-এর বদলে Log বলতে চেয়েছিল, এবং সেক্ষেত্রে LHS আর RHS সত্যিই সমান হয়। সেটাই আমরা দেখাব। আমাদের কাজ করতে হবে Log নিয়ে, তাই modulus আর Argument কাজে লাগবে। সেই কারণে polar coordinate নিয়ে কাজ করলে সুবিধা হতে পারে।

> Let $x + i = re^{i\theta}$. Then $x - i = re^{-i\theta}$.
> So $\frac{x-i}{x+i} = e^{-2i\theta}$.
> So $\text{Log}\ \frac{x-i}{x+i} = i\text{Arg}(e^{-2i\theta})$.

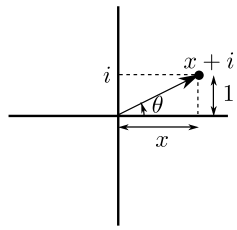


Fig 47

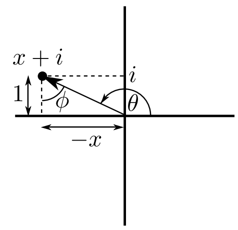


Fig 48

> Hence $i\text{Log}\,\frac{x-i}{x+i} = -\text{Arg}(e^{-2i\theta})$.

তার মানে আমাদের কাজটা দাঁড়াচ্ছে $e^{-2i\theta}$-র Arg বার করা। যদি Arg-এর বদলে arg বার করতে হত, তবে কাজটা সোজা ছিল--

> Clearly, $-2\theta \in \arg(e^{-2i\theta})$.
> So $\arg(e^{-2i\theta}) = \{-2\theta + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$.

এবার দেখতে হবে এই set-এর কোন্ সদস্য $(-\pi, \pi]$-এর মধ্যে থাকে। সেই হবে $\text{Arg}(e^{-2i\theta})$. এবার দুটো কেসে ভাঙতে হবে, $x > 0$ আর $x \leq 0$.

> <u>Case 1: $x > 0$:</u> Here we can take $\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$.

Fig 47 দেখে নিলে বুঝবে এটা কোথা থেকে পেলাম। ছবিটা দেখে $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{x}$ লিখতে ইচ্ছা হতে পারে। সেটা ভুল নয়, কিন্তু অংকটায় যেহেতু $\tan^{-1} x$ তাই আমরা এইভাবে লিখলাম। আর হ্যাঁ, এখানে লেখার একটা সূক্ষ্ম প্যাঁচ আছে। মনে রেখো, $x + i = re^{i\theta}$ থেকে কিন্তু θ-র অসংখ্য value পাওয়া যায়। তাদের মধ্যে $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ হল <u>একটা</u> value. সেই কারণেই "We can take" লিখেছি।

> So $-2\theta = -\pi + 2\tan^{-1} x$.
> Now $\tan^{-1} x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies 2\tan^{-1} x \in (0, pi) \implies -2\theta \in (-\pi, 0)$.
> Hence $-2\theta + 2n\pi \in (-\pi, \pi]$ when $n = 0$.
> So $\text{Arg}(e^{-2i\theta}) = -2\theta = -\pi + 2\tan^{-1} x$.
> Thus $i\text{Log}\,\frac{x-i}{x+i} = \pi - 2\tan^{-1} x$.

ব্যস্, উত্তরের একটা লাইন পেয়ে গেলাম! এবার অন্য কেসটা--

> <u>Case 2: $x \leq 0$:</u> Here also we can take $\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$.

এইটা কী করে এল সেটা ঠাণ্ডা মাথায় বুঝে নাও। ছবিটা এখানে Fig 48-এর মত। এখানে θ আবার $\frac{\pi}{2}$-এর চেয়ে বেশী। এইরকম কোণের tan বার করতে গেলে অনেক সময়ে মাথা গুলিয়ে যায়। তাই পুরো ব্যাপারটাকে একটা right angled triangle-এ পরিণত করে নিলে সুবিধা হয়। আমরা সেটাই করেছি ছবিতে। এবার ছবিতে দ্যাখো $\phi = \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$. এবার ϕ থেকে θ পর্যন্ত পৌঁছনো সোজা। Right angled triangle-এর অন্য কোণটা হল $\frac{\pi}{2} - \phi$, আর π থেকে সেটা বিয়োগ করলেই পেয়ে যাবে θ. তাই $\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{\pi}{2} + \phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$. সেটাই আমরা লিখেছি।

> So $-2\theta = -\pi + 2\tan^{-1} x$.
> Now $\tan^{-1} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \implies 2\tan^{-1} x \in (-\pi, 0] \implies -2\theta \in (-2\pi, -\pi]$.
> Hence $-2\theta + 2n\pi \in (-\pi, \pi]$ when $n = 1$.
> So $\operatorname{Arg}(e^{-2i\theta}) = -2\theta + 2\pi = \pi + 2\tan^{-1} x$.
> Thus $i\operatorname{Log} \frac{x-i}{x+i} = -\pi - 2\tan^{-1} x$.
> Hence proved.

■

4.2 Power

আমরা ছোটোবেলাতে শিখি a^2 মানে $a \times a$. একইভাবে $a^3 = a \times a \times a$, ইত্যাদি। অর্থাৎ যে কোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n\text{বার}}$. এর কিছু দিন পরে আমরা শিখি a^{-1} মানে $\frac{1}{a}$. সুতরাং যেকোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই আমরা পেয়ে যাই $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. আবার যদি $a^{1/2}$ লিখি, তার মানে $\sqrt{a}$. একইভাবে, যেকোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই $a^{1/n}$ মানে হল $\sqrt[n]{a}$. সুতরাং এবার যদি বলি $a^{2/3}$, অমনি তুমি বুঝে নেবে $\sqrt[3]{a^2}$. একই কায়দা খাটবে যে কোনো rational সংখ্যা $\frac{p}{q}$-এর বেলাতেই, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. এখানে $p \in \mathbb{Z}$ এবং $q \in \mathbb{N}$.
কিন্তু যদি $a^{\sqrt{2}}$ মানে জিজ্ঞাসা করি? তবে অনেকেই ধন্ধে পড়ে যাবে। আসলে যেকোনো $a, b \in \mathbb{R}$ (যেখানে $a > 0$) দেওয়া থাকলেই a^b-র সংজ্ঞা হল $e^{b \log a}$. এ হল real সংখ্যাদের বেলায়। Complex সংখ্যাদের বেলাতেও আমরা একই সংজ্ঞা ব্যবহার করব, খালি এখন exponential আর logarithm দুটোই হবে complex.

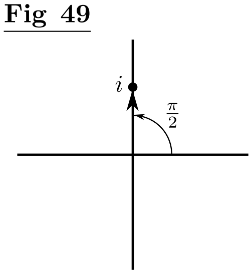
Example 22: For complex numbers a and z define a^z, where $a \neq 0$.[1] **(2009.1hii)**

SOLUTION:

> **DEFINITION: Complex power**
>
> If $a, z \in \mathbb{C}$ and $a \neq 0$, then a^z is defined as $e^{z \log a}$. Since complex logarithm is a set-valued function, a^z is actually a set of complex numbers.

■

Fig 49



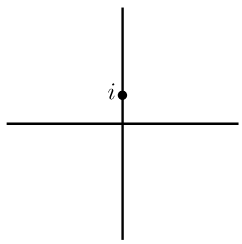


Fig 50

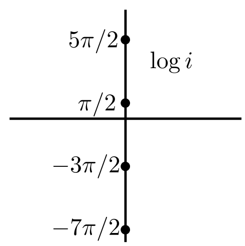


Fig 51

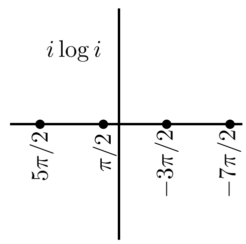


Fig 52

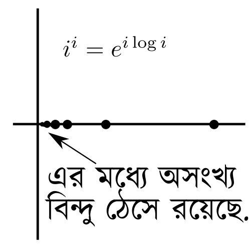


Fig 53

একটা উদাহরণ দেখা যাক। ধরো আমরা i^i বার করতে চাই। সেটাই চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 23: Show that the values of i^i are all real.[1] **(2017,2015)**

SOLUTION:

> $i^i = e^{i\log i}$.

এটা সংজ্ঞা থেকে সরাসরি পাওয়া গেল। এবার আমরা $\log i$ বার করার চেষ্টা করব।

> Now $\log i = \log|i| + i\arg(i) = \log 1 + i\arg(i)$.
> We know that $\frac{\pi}{2}$ is one value of $\arg(i)$.

এটা ছবি দিয়ে ভাবলেই বুঝবে (Fig 49)।

> So $\arg(i) = \{2n\pi + \frac{\pi}{2} \ : \ n\in\mathbb{Z}\}$.
> Thus, $\log i = \{2n\pi i + \frac{\pi i}{2} \ : \ n\in\mathbb{Z}\}$.
> So $i\log i = \{-2n\pi - \frac{\pi}{2} \ : \ n\in\mathbb{Z}\}$.
> Hence $i^i = e^{i\log i} = \left\{\exp\left(-2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \ : \ n\in\mathbb{Z}\right\}$,

লক্ষ করো এখানে i-গুলো সব কেটে বেরিয়ে গেছে। তার মানে--

> which is a set of real numbers, as required.

■

এই অংকটা ছবি দিয়ে কীভাবে চিন্তা করা যেত বলি। আমরা শুরু করব i থেকে, সেটা দেখিয়েছি Fig 50-এ। এর log নিলে কী হয় তো জানোই, একটা vertical লাইন বরাবর 2π দূরত্ব অন্তর অন্তর বিন্দু পাওয়া যায় (Fig 51)। এরপরের কাজ হল একে i দিয়ে গুণ করে $i\log i$ বানানো। এদিকে i দিয়ে গুণ করা মানে যে ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে $90°$ ঘোরানো সে তো আমরা Wessel-এর আমল থেকেই জানি। সুতরাং ছবিটা দাঁড়ালো Fig 52-এর মত। বিন্দুগুলো সবাই real axis-এর উপরে আছে, সুতরাং e^z লাগালে ওরা positive real axis-এ গিয়ে পড়বে (Fig 53)। ব্যস্ হয়ে গেল!
Fig 53-এর বিন্দুগুলোর দিকে ভালো করে তাকালেই দেখবে বিন্দুগুলো ক্রমশঃই ডানদিকে ছড়িয়ে পড়ছে। এই ব্যাপারটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Exercise 4: Show that the different values of i^i can be so arranged that they form a GP.[2] **(2008.2aii)**

HINT:

আগের অংকটা থেকে পেয়েছিলে $i^i = \{e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}} \ : \ n\in\mathbb{Z}\}$. সেই অব্ধি টুকে দাও। তারপরের অংশটা এইরকম--

Taking $a = e^{-\frac{\pi}{2}}$ and $r = e^{-2\pi}$ we can write these as

$$\ldots, ar^{-2}, ar^{-1}, a, ar, ar^2, \ldots,$$

which is a GP.

তবে সাবধান, এখানে GP-টার দু দিকেই ডট্ ডট্ আছে, তাই first term বলে কিছু হয় না। ■

আরো একটা অংক দিই i^i নিয়ে।

Exercise 5: Show that $\sin(\log i^i) = -1$.[2] **(2009.1iII)**

HINT:

Example 23-এর মতই এগোও। সেখানে দেখেছিলাম যে, $i \log i = \left\{-2n\pi - \frac{\pi}{2} \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$.
এবার যদি এই set-এর যে কোনো element-এর sin বার করো, তবে পাবে $\sin\left(-2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. ■

Example 24: If $a(\neq 0), z_1, z_2$ are complex, examine the validity of the relation $a^{z_1} \cdot a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$.[3] **(2016.6b)**

SOLUTION:

For any $z \in \mathbb{C}$ we have $a^z = \exp(z \log a)$.
Now, by standard property of complex exponential function,
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$.
Now

$$a^{z_1} \cdot a^{z_2} = \exp(z_1 \log a)\exp(z_2 \log a) = \exp((z_1 + z_2)\log a) = a^{z_1+z_2},$$

as required.

■

DAY 5
নানা রকম function (part 3)

5.1 Hyperbolic

এবার আরও কিছু function-এর কথা শিখব, যাদের বলে এককেটা **hyperbolic function.** এদের মধ্যে প্রধান দুটো হল hyperbolic sine এবং hyperbolic cosine--

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

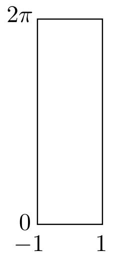


Fig 54

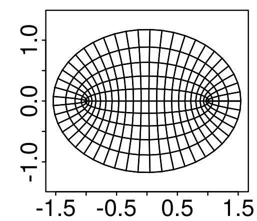


Fig 55

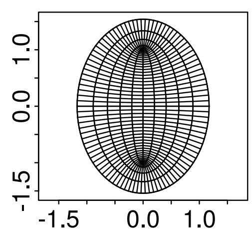


Fig 56

এই সংজ্ঞাদুটো খুব অপরিচিত হবার কথা নয়। বস্তুতঃ যদি z একটা real সংখ্যা হয় (মানে $z = x + 0i$ চেহারা হয়, যেখানে $x \in \mathbb{R}$), তবে এই সংজ্ঞাটা আমাদের পরিচিত $\sinh x$ বা $\cosh x$-এ পরিণত হয়। এদেরকে ব্যবহার করে আরো hyperbolic function বানানো যায়--

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},$$
$$\text{cosech} z = \frac{1}{\sinh z},$$
$$\text{sech} z = \frac{1}{\cosh z},$$
$$\text{coth} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

এই function-গুলো যে complex analysis শেখার জন্য ভীষণ প্রয়োজনীয় এমন নয়। তবে $\cosh z$ আর $\sinh z$-এর গ্রাফ দেখলে মজা লাগতে পারে। তাই সেটা একটু আলোচনা করি। প্রথমে গ্রাফ দুটো দেখাই। যদি আমরা Fig 54-এর মত $\mathbb{C}$-এর একটা অংশের উপর $\cosh z$ লাগাই, তবে পাব Fig 55 আর যদি $\sinh z$ লাগাই, তবে পাব Fig 56।

প্রথমে $\cosh z$-এর গ্রাফটা দ্যাখো। বেশ একটা বাহারী পাপোষের মত, না? পরপর অনেকগুলো ellipse একটার মধ্যে একটা বসানো আছে, আর তাদের মধ্যে দিয়ে আড়াআড়ি কিছু সূতো চলে গেছে যেন। বলে না দিলে, খালি চোখে দেখে বোঝা কঠিন যে সূতোগুলো আসলে একেকটা hyperbola (খালি একেবারে মাঝের সূতোটা বাদে, সেটা সটান একটা সরলরেখা, imaginary axis বরাবর রয়েছে)। এই ellipse আর hyperbola-গুলো কোথা থেকে এল সেটা বোঝার জন্য ellipse আর hyperbola-দের একটা করে parametric form মনে করিয়ে দিই। যদি $x(t) = a\cos t$ আর $y(t) = b\sin t$ হয়, তবে $(x(t), y(t))$ একটা ellipse দেবে। এখানে $t \in \mathbb{R}$. এটা প্রমাণ করা খুবই সহজ--

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Hyperbola-র বেলায় parametric form-টা একটু অপরিচিত লাগতে পারে, $x(t) = a\cosh t$ আর $y(t) = b\sinh t$. এটাও প্রমাণ করা কঠিন নয়--

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

এই দুটো parametric form মনে রাখলেই $\cosh z$-এর গ্রাফের চেহারাটা কেন ওরকম পাপোষের মত হয়েছে সেটা বুঝতে পারবে--

ধরো $z = x + iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$.

তাহলে

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2} = \cdots = \cos y\cosh x + i\sin y\sinh x.$$

একে তুমি $(\cos y\cosh x, \sin y\sinh x)$ বিন্দুটা বলে ভাবতে পারো। যদি x-কে স্থির রেখে খালি y-কে বদলাই, তবে এটা দেখতে $(a\cos y, b\sin y)$-এর মত যেখানে $a=\cosh x$ আর $b=\sinh x$ দুটো constant. এটা একটা ellipse-এর parametric form. আবার যদি y-কে স্থির রেখে x-কে বদলাই, তবে পাব $(a\cosh x, b\sinh x)$, যেখানে $a=\cos y$ আর $b=\sin y$ হল constant. এটা একটা hyperbola-র parametric form.
এত কিছুতে যদি মাথা গুলিয়ে গিয়ে থাকে, তবে অভয় দিয়ে বলি যে, এই আলোচনা থেকে এই কথাটুকু মনে রাখলেই হবে--

> $\cosh z$ এমন একটা function, যেটা vertical লাইনদের ellipse-এ আর horizontal লাইনদের hyperbola-তে পরিণত করে।

Exercise 6: একইভাবে $\sinh z$-এর গ্রাফের বর্ণনা দাও।
■

নীচের অংকগুলো নিছক কিছু কসরতের অংক।

Example 25: If z_1 and z_2 are complex numbers, prove that

$$\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2.$$

[3] **(2008.2ai)**
SOLUTION: বুঝতেই পারছ এখানে বার বার করে e^{z_1}, e^{z_2} ইত্যাদি লিখতে হবে। তাই আমরা ওদেরকে সংক্ষিপ্ত কিছু নাম দিয়ে নিই--

> Let $t_i=e^{z_i}$ for $i=1,2$ and $t=e^{z_1+z_2}$
>
> $$\begin{aligned}\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2 &= \frac{1}{4}\left[\left(t_1-\frac{1}{t_1}\right)\left(t_2+\frac{1}{t_2}\right)+\left(t_1+\frac{1}{t_1}\right)\left(t_2-\frac{1}{t_2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{4}\left(2t_1t_2-\frac{2}{t_1t_2}\right)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\sinh(z_1+z_2),\end{aligned}$$
>
> as required.

■

Example 26: Find the general solution of $\cosh z=-2$.[3] **(2010.1dii)**

SOLUTION: এখানে general solution বার করতে বলেছে, অর্থাৎ এরকম যাবতীয় $z\in\mathbb{C}$ বার করতে হবে, যাতে $\cosh z=-2$ হয়।

> To solve: $\cosh z=-2$,
> ie, $\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=-2$,
> or, $e^z+e^{-z}=-4$,
> or, putting $t=e^z$, $t+\frac{1}{t}=-4$,
> or $t^2+4t+1=0$.
> Solving this, we get $t=-2\pm\sqrt{3}$.

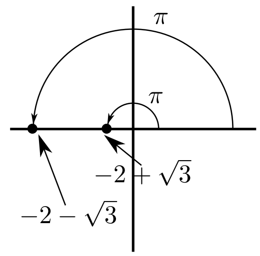


Fig 57

> Thus $e^z = -2 \pm \sqrt{3}$.

আমরা e^z পেয়ে গেছেই, এবার এ থেকে আমাদের z-কে পেতে হবে। তার মানে log নিতে হবে।

> So $z = \log(-2 \pm \sqrt{3})$.

এখানে মনে রেখো এই log-টা কিন্তু আসলে complex logarithm, যদিও $-2 \pm \sqrt{3} \in \mathbb{R}$. যেহেতু complex logarithm হল একটা set-valued function, তাই এই $\log(-2 \pm \sqrt{3})$ হল আসলে $\log(-2 - \sqrt{3})$ আর $\log(-2 + \sqrt{3})$-এর union. এই দুটো set-কে বার করা যাক। তার জন্য $-2 - \sqrt{3}$ আর $-2 + \sqrt{3}$ বিন্দু দুটোকে এঁকে নিয়েছি Fig 57-এ।

> Now $|-2-\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$ and $\mathrm{Arg}(-2-\sqrt{3}) = \pi$.
> Also $|-2+\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$ and $\mathrm{Arg}(-2+\sqrt{3}) = \pi$.
> Hence $\log(-2-\sqrt{3}) = \log|-2-\sqrt{3}| + i\arg(-2-\sqrt{3}) = \log(2+\sqrt{3}) + i\{\pi + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$,

এটা কী করে হল বুঝলে তো? Arg-এর সঙ্গে $2n\pi$ জুড়ে দিলেই arg পাওয়া যায়, সেটাই কাজে লাগিয়েছি।

> and $\log(-2+\sqrt{3}) = \log|-2+\sqrt{3}| + i\arg(-2+\sqrt{3}) = \log(2-\sqrt{3}) + i\{\pi + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$.
> So the required general solution is
>
> $$\{\log(2+\sqrt{3}) + i(2n+1)\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\log(2-\sqrt{3}) + i(2n+1)\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

■

এই যে set-টা বার করলাম এর আরেক নাম হল $\cosh^{-1}(-2)$. বুঝতেই পারছ, $\cosh^{-1} z$ হল একটা set-valued function. এই অংকটা যে কায়দায় করলাম, সেই কায়দাতেই যে কোনো $z \in \mathbb{C}$-এর জন্যই $\cosh^{-1} z$ বার করা যেতে পারে। ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝে রাখা যাক।
ধরো কোনো $z \in \mathbb{C}$ দিয়ে তার জন্য $\cosh^{-1} z$ বার করতে বলেছে, মানে সেই সব <u>যাবতীয়</u> $w \in \mathbb{C}$-এর set, যাতে $\cosh w = z$ হয়। প্রথমে $t = e^w$ নাও, তাহলে $t + \frac{1}{t} = 2z$ চাইছি। সুতরাং $t^2 - 2zt + 1 = 0$. এটা t-এর একটা quadratic equation. একটু চিন্তা করলেই (এবং শ্রীধর আচার্য লাগালেই) দেখবে যে খালি $z = 1$ বা $z = -1$ হলে এর একটাই root, নইলে দুটো root. এবার কাজ হল e^w থেকে w-তে ফেরা, মানে log নেওয়া। প্রতিটা root-এর log নিলে একগুচ্ছ বিন্দু পাবে, একই vertical লাইন বরাবর 2π দূরত্ব অন্তর অন্তর সাজানো। সুতরাং $\cosh^{-1} z$ হবে এমন একটা set যার সদস্যরা একটা বা দুটো vertical লাইন বরাবর 2π দূরত্ব অন্তর অন্তর সাজানো বিন্দু। এই ছবিটা মাথায় রাখা ভীষণ দরকারী কিছু নয়। তবে মজা লাগতে পারে ভেবে বললাম।

নীচের অংকটাও একইরকম, তবে একটু বেশী সহজ।

Exercise 7: Find a complex number z such that $\cosh z = \frac{1}{2}$.[2] **(2013.5a)**
HINT: এখানে কিন্তু general solution চায় নি, খালি একটা solution চেয়েছে। আগের অংকের মতই একটা quadratic equation পাবে। তার যেকোনো একটা root নাও। তার পর নিজে নিজে এগোও।
■

নীচের অংকটাও একইরকম, এবার অবশ্য general solution চেয়েছে।

Exercise 8: Find the general solution of $\sinh z = 2$.[2] **(2017.6c)** ■

এবারে একটা অংক দেখব যেটা ছবি দিয়ে না ভাবলে দিশাহারা লাগতে পারে।

Example 27: If $\cosh^{-1}(x+iy) + \cosh^{-1}(x-iy) = \cosh^{-1} a$, where a is a constant > 1, and x, y are real numbers, then show that the point (x, y) lies on an ellipse.[5] **(2012.5)**
SOLUTION: অংকটায় একটু গোলমাল আছে, আসলে এমন কোনো $x, y \in \mathbb{R}$ সম্ভব নয় যাতে $\cosh^{-1}(x+iy) + \cosh^{-1}(x-iy) = \cosh^{-1} a$ হয় (যেখানে $a > 1$)। এর কারণটা একটু পরেই বলছি। আপাততঃ অংকটা মেরামত করে নেওয়ার জন্য শর্তটাকে সামান্য পাল্টে দেব--

$$\cosh^{-1}(x+iy) + \cosh^{-1}(x-iy) \subseteq \cosh^{-1} a.$$

এবং সেক্ষেত্রে $a > 1$ হওয়ারও কোনো দরকার নেই।
এই অংকটা করার অন্য দুটো তথ্য আমরা ব্যবহার করব, যেগুলো আগেই আলোচনা করেছি--

> Here we shall use two standard facts:
>
> - $\cosh(z)$ maps vertical lines to ellipses.
> - For any $z \in \mathbb{C}$ the points in $\cosh^{-1}(z)$ are along at most two vertical lines.

এবার তবে মূল কাজে হাত দেওয়া যাক।

> Enough to show that for (x, y) to satisfy the given condition, $\cosh^{-1}(x+iy)$ must lie on a vertical line.

কারণ তাহলেই $\cosh^{-1}(x+iy)$-এর উপরে cosh লাগালে যে $x+iy$ পাব সেটা একটা ellipse-এর উপরে থাকবে। আমরা proof by contradiction করব।

> Let, if possible, the points of $\cosh^{-1}(x+iy)$ not lie on a single vertical line.

সবাই একই vertical লাইন বরাবর থাকলে সবারই real অংশ সমান হত। এখানে আমরা তার উল্টোটা ধরে নিয়েছি, মানে--

> Then there are $z_1, z_2 \in \cosh^{-1}(x+iy)$ such that $\text{Re}(z_1) \neq \text{Re}(z_2)$.
> Now the set $\cosh^{-1}(x-iy)$ is the complex conjugate of $\cosh^{-1}(x+iy)$.

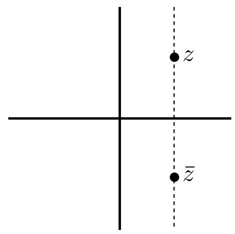


Fig 58

⟦ Because:

We have $\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y) = e^{\bar{z}}$.
So $\overline{\cosh z} = \cosh \bar{z}$.
So $\overline{w} \in \cosh^{-1} z \iff w \in \cosh^{-1} \bar{z}$.

⟧

So $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in \cosh^{-1}(x - iy)$.
Hence $z_1 + \bar{z}_1, z_2 + \bar{z}_2$ and $z_1 + \bar{z}_2$ are in $\cosh^{-1}(x + iy) + \cosh^{-1}(x - iy)$.
But these three numbers have distinct real parts, which is impossible since the points of $\cosh^{-1} a$ must be along at most two vertical lines ($\Rightarrow\Leftarrow$).

■

এবার বলি অংকটায় যে শর্তটা দেওয়া ছিল, সেটা কেন একটা অসম্ভব শর্ত। $\cosh^{-1}(x + iy)$ হল এমন একটা set যার সদস্যরা হয় একটা বা দুটো vertical লাইন বরাবর সাজানো থাকে। আর $\cosh^{-1}(x - iy)$ হল ওদেরই complex conjugate. এবার লক্ষ করো যে, কোনো complex সংখ্যা এবং তার conjugate একই vertical লাইনে থাকে (Fig 58)। ফলে $\cosh^{-1}(x + iy)$ আর $\cosh^{-1}(x - iy)$ দুয়েরই সদস্য একই vertical লাইন বরাবর থাকবে। সুতরাং $\cosh^{-1}(x + iy) + \cosh^{-1}(x - iy)$-এর পক্ষে খালি দুটো জিনিস হওয়া সম্ভব--

- এক, যদি $\cosh^{-1}(x+iy)$ একটা vertical লাইনেই সীমাবদ্ধ থাকে, তবে $\cosh^{-1}(x+iy)+\cosh^{-1}(x-iy)$-ও একটা vertical লাইনেই সীমাবদ্ধ থাকবে।
- দুই, যদি $\cosh^{-1}(x+iy)$-র জন্য দুটো vertical লাইন লেগে যায়, তবে $\cosh^{-1}(x+iy)+\cosh^{-1}(x-iy)$-র জন্য তিনটে vertical লাইন লাগবে।

এদিকে $a > 1$ হলে $\cosh^{-1} a$-র জন্য ঠিক দুটো vertical লাইন লাগবে (কারণ $w = e^z$ নিলে $w + \frac{1}{w} = 2a$-র দুটো distinct, real root থাকবে)। সুতরাং LHS-এর জন্য হয় একটা নয়তো তিনটে vertical লাইন লাগছে, অথচ RHS-এর জন্য লাগছে ঠিক দুটো। সুতরাং LHS এবং RHS আর সমান হয় কী করে!
এই আলোচনাটাকেই ব্যবহার করে একটা ঠকানো প্রশ্ন বানিয়েছি, দ্যাখো তো চট্‌ করে উত্তর দিতে পারো কিনা।

Exercise 9: Let $x, y \in \mathbb{R}$ be such that $\cosh^{-1}(x + iy) + \cosh^{-1}(x - iy) = \cosh^{-1} a$ for some $a > 0$. Find a. ■

তবে শেষের এই আলোচনাটুকু যদি গোলমেলে লাগে, তবে এটা নিয়ে বেশী মাথা ঘামিও না। Complex analysis শেখার জন্য এর কোনোই গুরুত্ব নেই।

DAY 6
নানা রকম function (part 4)

6.1 Trigonometric

এবার কিছু trigonometric function-এর complex সংস্করণ শেখা যাক। যদি $z \in \mathbb{C}$ হয়, তবে $\sin z$ আর $\cos z$-এর সংজ্ঞা দেওয়া হয় এইভাবে--

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

আর

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

সংজ্ঞাগুলো দেখে মোটেই পরিচিত $\sin x$ বা $\cos x$-এর মত দেখাচ্ছে না, কিন্তু ওদের ধর্মগুলো সত্যিই $\sin x$ আর $\cos x$-এর মতই। যেমন ধরো $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. আবার $\sin 0 = 0$ এবং $\cos 0 = 1$-ও হয়। আরো বিশদ আলোচনার আগে এদের ব্যবহার করে বাকি trigonometric function-দের সংজ্ঞাও দিয়ে রাখি। এই সংজ্ঞাগুলোর মধ্যে অবশ্য নতুনত্ব কিছুই নেই।

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \operatorname{cosec} z &= \frac{1}{\sin z}, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}. \end{aligned}$$

সংজ্ঞাগুলো দেখে আন্দাজ করতে পারছ যে, $\sin, \cos, \tan$ ইত্যাদিদের সঙ্গে $\sinh, \cosh, \tanh$ ইত্যাদিদের ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক আছে। সেইটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Exercise 10: দেখাও--
(i) $\cosh iz = \cos z$, (ii) $\sinh iz = i \sin z$, (iii) $\tanh iz = i \tan z$. ■

এবার বলি ছবি দিয়ে ভাবলে $\sin z$-টা কীরকম দেখতে। Fig 59-এ দেখিয়েছি ছবিটা। আগে আমরা $\cosh z$-এর যে ছবিটা দেখেছিলাম (Fig 60-এ আরেকবার দেখালাম), তার সঙ্গে এর আশ্চর্য মিল, তাই না? তার কারণ বুঝবে এইভাবে চিন্তা করলেই--ধরো $z = x + iy$ নিলাম (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$)। তবে

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \cdots = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Fig 59

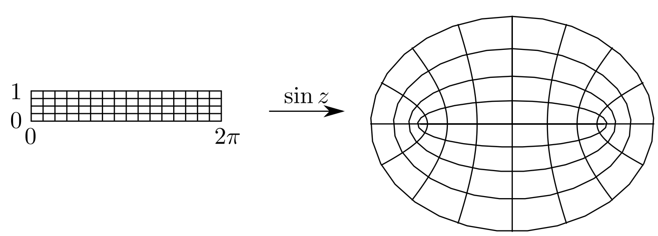
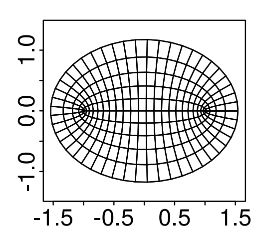


Fig 60



সুতরাং x-কে স্থির রেখে y-কে বদলালে যে curve-টা পাবে তার parametric form হল $(a\cosh y, b\sinh y)$, যেখানে $a = \sin x$ আর $b = \cos x$ হল constant. এটা একটা hyperbola-র parametric form. আবার যদি y-কে স্থির রেখে x-কে বদলাতে, তবে পেতে $(a\sin x, b\cos x)$, যেখানে constant দুটো হল $a = \cosh y$ আর $b = \sinh y$. এটা হল ellipse-এর parametric form.

Exercise 11: যতই একইরকম দেখতে হোক, $\cosh z$ আর $\sin z$-এর ছবির মধ্যে একটা গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। বল তো সেটা কী? ■

নীচের অংকটা করে complex trigonometric function-দের সঙ্গে বন্ধুত্ব করে নাও।

Exercise 12: সরাসরি সংজ্ঞা লাগিয়ে প্রমাণ করো--

1. $\forall z \in \mathbb{C}\ \ \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$
2. যে সব $z \in \mathbb{C}$-এর জন্য $\cos z \neq 0$, তাদের বেলায় $\sec^2 z - \tan^2 z = 1.$
3. যে সব $z \in \mathbb{C}$-এর জন্য $\sin z \neq 0$, তাদের বেলায় $\mathrm{cosec}^2 z - \cot^2 z = 1.$
4. $\sin(n\pi) = 0$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.
5. $\cos(n\pi) = (-1)^n$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.
6. $\forall z \in \mathbb{C}\quad \sin(-z) = -\sin z$ এবং $\cos(-z) = \cos z$.

■

আমরা জানি real function হিসেবে $\sin x, \cos x$ ইত্যাদিরা সবাই periodic এবং period-টা হল 2π. সেই একই ধর্ম complex trigonometric function-দের বেলাতেও অক্ষুণ্ণ আছে, যেমন $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ হয়। সরাসরি সংজ্ঞা লাগিয়ে পরীক্ষা করেই দ্যাখো। একইভাবে $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ হবে। সুতরাং বাকিদের ক্ষেত্রেও একই ব্যাপার হবে, কারণ ওরা $\sin z$ আর $\cos z$ মিলিয়েই তৈরী। আর হ্যাঁ, z যদি $x + 0i$ চেহারার হয়, যেখানে $x \in \mathbb{R}$, তবে $\sin z$ আর $\cos z$ কিন্তু সত্যিই আমাদের ছোটোবেলায় শেখা $\sin x$ আর $\cos x$-এই পরিণত হয়। এটাও সরাসরি সংজ্ঞা থেকেই দেখা যায়।
এই তো গেল real trigonometric function আর complex trigonometric function-দের মধ্যে সাদৃশ্যের কথা। এবার পার্থক্যের কথা বলি।
আমরা জানি real function-দের বেলায় $\sin x$ আর $\cos x$ সর্বদা $[-1, 1]$-এর মধ্যে থাকে। ওদিকে $|\sin z|$-টা কিন্তু 1-এর চেয়ে বড় হতেই পারে! একই কথা খাটে $|\cos z|$-এর বেলাতেও। নীচের অংকে এরকমই একটা উদাহরণ রয়েছে।

Example 28: এমন $z \in \mathbb{C}$ দাও যাতে $\sin z = 2$ হয়।

SOLUTION: প্রথমেই $\sin z$-এর সংজ্ঞা ব্যবহার করে পাচ্ছি--

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2.$$

মানে

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i.$$

অতএব $w = e^{iz}$ নিলে হচ্ছে

$$w - \frac{1}{w} = 4i.$$

এটা থেকে দিব্যি একটা quadratic equation পাওয়া যাবে--

$$w^2 - 4iw - 1 = 0,$$

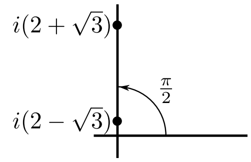


Fig 61

যাকে সমাধান করলে পাবে

$$w = \frac{4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = i(2 \pm \sqrt{3}).$$

এবার এ থেকে z বার করতে হবে। আমরা জানি $e^{iz} = w$ তাই $z = \frac{1}{i}\log w$ হবে।
যেহেতু $2+\sqrt{3}$ এবং $2-\sqrt{3}$ দুজনেই > 0, তাই w-র যে দুটো value পেলাম তারা complex plane-এ দেখতে Fig 61-এর মত। দেখাই যাচ্ছে যে, এদের দুজনের arg-ই হল $\left\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$. সুতরাং

$$z = \frac{\log w}{i} = \frac{1}{i}\log(2 \pm \sqrt{3}) + \left\{\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\} - i\log(2 \pm \sqrt{3}).$$

■

সমাধানটার ধাপগুলো খুব উপাদেয় এমন দাবী করছি না, কিন্তু ওদের মধ্যে কোথাও কোনো প্যাঁচ নেই, করে গেলেই হল, উত্তর আসতে বাধ্য! আমরা $\cosh^{-1}$-এর বেলায় ছবি দিয়ে ভেবেছিলাম, সেভাবে ভাবলে এই অংকটা থেকে দেখবে যাই $z \in \mathbb{C}$ দেওয়া হোক না কেন $\sin^{-1} z$-এর বিন্দুগুলো একটা বা দুটো horizontal লাইন বরাবর 2π দূরত্ব অন্তর অন্তর সাজানো থাকবে।
নীচের অংকটাও আগেরটার মতই।

Exercise 13: Find $\sin^{-1}(i)$ and $\sin^{-1}(-i)$.[2] **(2010.1ei)**
HINT: মনে রেখো যে, $\sin^{-1}(i)$ বার করা মানে সেই সব $z \in \mathbb{C}$ বার করা যাতে $\sin z = i$ হয়। এইখানে real function-দের সঙ্গে notation-এর পার্থক্যটা লক্ষ কর--যদি $\mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করার সময়ে $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ বার করতে বলতাম, তবে এমন x বার করতে হত যাতে $\sin x = \frac{1}{2}$ হয় এবং $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ হয়। কিন্তু $\mathbb{C}$-এর বেলায় $\sin^{-1}$-এর উপর এরকম কোনো বাড়তি শর্ত নেই, এখানে $\sin^{-1}$ একটা set-valued function.
আর হ্যাঁ, $\sin^{-1}(i)$ বার করার পর সেটার আগে মাইনাস লাগিয়ে দিলেই $\sin^{-1}(-i)$ পেয়ে যাবে, কারণ $\sin(-z) = -\sin z$.
■

নীচের অংকটাও একইরকম, খালি এবার কাজ হচ্ছে $\tan^{-1}$ নিয়ে।

Example 29: Find $\tan^{-1}(-1)$ and $\tan^{-1}(-i)$.[3] **(2010.1ei)**

SOLUTION: প্রথম অংশে আমাদের বার করতে হবে সেইসব যাবতীয় $z \in \mathbb{C}$ যাতে $\tan z = -1$ হয়।

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}.$$

So taking $w = e^{iz}$ we get

$$\frac{w - w^{-1}}{w + w^{-1}} = -i,$$

ie,

$$\frac{w^2-1}{w^2+1} = -i,$$

or

$$w^2 = \frac{1-i}{1+i} = \cdots = -i.$$

So $e^{2iz} = -i$.

এবার log নিলেই হবে।

$$2iz = \log(-i) = \log|-i| + i\arg(-i) = i\left\{-\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

So $\tan^{-1}(i) = \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$.

এই হল প্রথম অংশের উত্তর। দ্বিতীয় অংশে কিন্তু একটা প্যাঁচ আছে--

To find $\tan^{-1}(-i)$ we have to solve

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} = -i,$$

or

$$e^{iz}-e^{-iz} = e^{iz}+e^{-iz},$$

or $e^{-iz} = 0$, which is impossible.

কারণ $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^{iz} \neq 0$.

Hence $\tan^{-1}(-i) = \phi$.

■

Example 30: Find z such that $\tan z = \cos\theta + i\sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.[5] **(2008.2b)**

SOLUTION: এখানে বোঝা যাচ্ছে না যে, খালি এরকম যেকোনো একটা z বার করতে হবে নাকি এরকম যাবতীয় z বার করতে হবে। বলাই বাহুল্য যে, যাবতীয় z বার করাটা বেশী কঠিন। আমরা সেটাই করব।

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}.$$

আবার আগের অংকের মতই এগোব, e^{iz}-কে w নাম দিয়ে--

Let $w = e^{iz}$. Then

$$\frac{w-w^{-1}}{w+w^{-1}} = ip,$$

where $p = \cos\theta + i\sin\theta$.

So
$$\frac{w^2-1}{w^2+1}=ip.$$

এই অবধি আগের অংকের মতই। এবার তোমার হয়তো হাত নিশ্‌পিশ্‌ করে উঠছে componendo-dividendo লাগিয়ে $w^2=\frac{1+ip}{1-ip}$ লিখে ফেলার জন্য। কিন্তু না, দাঁড়াও। এখানে কী তুমি $1-ip$ দিয়ে ভাগ করতে পারো, মানে $1-ip$-টা শূন্য হয়ে যেতে পারে না তো? আসলে পারে না, কিন্তু সেটা আমরা এখনই চট্‌ করে বলতে পারছি না। তাই componendo-dividendo করার লোভটা সংবরণ করে গোদা পদ্ধতিতেই এগোব--

or $w^2-1=ip(w^2+1)$, or $w^2(1-ip)=1+ip$.

এবার $1-ip$ দিয়ে ভাগ করতে চলেছি, সুতরাং সেটা শূন্য হতে পারে কিনা সেই প্রশ্নটা আর এড়ানো যাবে না।

Now $1-ip\neq 0$.

⟦ Because:

Otherwise, $ip=1$, and so we have $w^2\times 0=2$, which is impossible.

⟧

So $w^2=\frac{1+ip}{1-ip}$.

Thus $e^{2iz}=\frac{1+ip}{1-ip}$.

এতক্ষণ $\cos\theta+i\sin\theta$-কে সংক্ষেপে p লিখে কাজ চালাচ্ছিলাম। কিন্তু শেষ উত্তরে তো আর p লেখা যাবে না, কারণ প্রশ্নে কোনো p ছিল না। তাই এবার θ দিয়ে লেখা শুরু করব। বার বার $\cos\theta$ আর $\sin\theta$ লিখে লিখে আঙুল ব্যথা হয়ে যাবে। তাই একটু সংক্ষিপ্ত নাম দিয়ে নিই--

Now, writing $s=\sin\theta$ and $c=\cos\theta$,
$$\frac{1+ip}{1-ip}=\frac{(1-s)+ic}{(1+s)-ic}=\frac{((1-s)+ic)((1+s)-ic)}{(1+s)^2+c^2}=\cdots=\frac{ic}{1+s}=\frac{c}{1+s}e^{i\pi/2}.$$

এখানে $s+1$ শূন্য হতে পারে না, কারণ তবে $c=0$ হবে, এবং $1-ip=0$ হয়ে যাবে, যেটা আগেই দেখিয়েছি যে হতে পারে না।

Hence the general solution is $\left\{\frac{1}{2i}\left(\log\frac{c}{s+1}+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$, or
$$\left\{\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)-\frac{i}{2}\log\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

■

Exercise 14: দেখাও যে, Euler's formula আর de Moivre's theorem-কে এইভাবে generalise করা যায়--

1. $\forall x,y\in\mathbb{C}\quad e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

2. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\cos z + i \sin z)^n = \cos(nz) + i\sin(nz)$.

■

নীচের অংকটা আমাদের পূর্বপরিচিত।

Exercise 15: Solve for x :

$$(\cos x + i\sin x)(\cos 2x + i\sin 2x)\cdots(\cos nx + i\sin nx) = -i,$$

where n is any positive integer.[2] **(2009.1gii)**
HINT: এই অংকটা আমরা আগে দেখেছি Example 8-এ। অংকটায় বলে দেয় নি $x \in \mathbb{R}$ নাকি $x \in \mathbb{C}$. সেখানে আমরা $x \in \mathbb{R}$ ধরে করেছিলাম। যদি $x \in \mathbb{C}$ হয়, তাহলেও কিন্তু ঠিক একইভাবে করা যাবে। চেষ্টা করে দ্যাখো। ■

এর পরের অংকগুলো নিছক কসরতের অংক। পরীক্ষার চিন্তা না থাকলে বাদ দিয়ে যেতে পারো।

Example 31: Prove that

$$\sin\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

[2] **(2017, 2011)**
SOLUTION: এখানে ধরে নিতে হবে $a, b \in \mathbb{R}$ এবং a, b দুজনেই একই সঙ্গে 0 নয়।

> We assume that $a, b \in \mathbb{R}$, and that $a + ib \neq 0$.
> Let $a + ib = re^{i\theta}$ for some $r > 0$ and some $\theta \in \mathbb{R}$.

অর্থাৎ কিনা সংক্ষেপে বলা হল যে, $a+ib$-এর modulus-কে r নাম দিচ্ছি, এবং $\arg(a+ib)$-র একটা value নিচ্ছি θ.

> Then $a - ib = re^{-i\theta}$.

কারণ $re^{i\theta}$-র conjugate হল $re^{-i\theta}$.

> So $\frac{a-ib}{a+ib} = e^{-2i\theta}$.
> Hence $\log\frac{a-ib}{a+ib} = \{-2i\theta + 2n\pi i \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$.
> So $\sin\left[i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right] = \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

এবার আমরা $\sin\theta$ আর $\cos\theta$-কে a, b দিয়ে লিখব।

> Now, $a + ib = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$.
> Here $r = \sqrt{a^2+b^2}$ and equating real and imaginary parts,
>
> $$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ and } \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
>
> Hence
>
> $$\sin\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right) = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2ab}{a^2+b^2},$$

as required.

■

Example 32: If $\log\sin(\theta+i\phi)=\alpha+i\beta$, prove that $\cos(\theta-\beta)=e^{2\phi}\cos(\theta+\beta)$.[5] **(2015.6)**

SOLUTION:এখানে প্রশ্নের ভাষাটা একটু গোলমেলে। আমরা জানি যে, complex logarithm হল একটা set-valued function. তাই $\log\sin(\theta+i\phi)$ হল একটা set. সেটা আবার কী করে একটা complex সংখ্যা $\alpha+i\beta$-র সমান হয়? আসলে বলতে চেয়েছিল $\log\sin(\theta+i\phi)$-এর মধ্যে তুমি যাই complex সংখ্যা $\alpha+i\beta$ নাও না কেন, তার জন্য $\cos(\theta-\beta)=e^{2\phi}\cos(\theta+\beta)$ হবে।
আরো একটা ছোটো জিনিস এখানে বলতে ভুলে গেছে, সেটা আমরা ধরে নেব, $\theta,\phi,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

> We assume that $\theta,\phi,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
> Take any $\alpha+i\beta\in\log\sin(\theta+i\phi)$.
> Then $\sin(\theta+i\phi)=e^{\alpha+i\beta}$.
> So
> $$\frac{e^{-\phi+i\theta}-e^{\phi-i\theta}}{2i}=e^{\alpha+i\beta},$$
> or
> $$e^{-\phi}(\cos\theta+i\sin\theta)-e^{\phi}(\cos\theta-i\sin\theta)=2ie^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta).$$
> Hence, equating real and imaginary parts,
> $$\begin{aligned}\cos\theta(e^{-\phi}-e^{\phi}) &= -2e^{\alpha}\sin\beta,\\ \sin\theta(e^{-\phi}+e^{\phi}) &= 2e^{\alpha}\cos\beta.\end{aligned}$$

এবার লক্ষ করো, যেটা দেখাতে বলেছে তার মধ্যে কোনো α নেই। তার মানে α-টাকে তাড়াতে হবে। যেহেতু আমাদের দুটো equation-এই e^{α} গুণ হয়ে রয়েছে, তাই একটা equation-কে অন্যটা দিয়ে ভাগ করলেই আর কোনো α থাকবে না--

$$\frac{\cos\theta(e^{-\phi}-e^{\phi})}{\sin\theta(e^{-\phi}+e^{\phi})}=-\frac{\sin\beta}{\cos\beta},$$

মানে

$$\frac{e^{-\phi}-e^{\phi}}{e^{-\phi}+e^{\phi}}=-\frac{\sin\theta\sin\beta}{\cos\theta\cos\beta}.$$

এবার componendo-dividendo লাগিয়ে অংকটা করে ফেলা যাবে। এভাবে এগোলে অংকটা চটপট হয়ে যাবে বলে মনে হচ্ছে বটে, কিন্তু এর মধ্যে গোঁজা রয়েছে। ভাগ করার আগে দেখে নেওয়া দরকার ছিল শূন্য দিয়ে ভাগ হয়ে যাচ্ছে কিনা। আমাদের ফর্মুলায় যারা রয়েছে, তাদের মধ্যে শূন্য হতে পারে না খালি e^{α} এবং $e^{-\phi}+e^{\phi}$. বাকিরা শূন্য হতেই পারে। তাই আমরা ভাগ করা এড়িয়ে চলব।

> So
> $$\big[\cos\theta(e^{-\phi}-e^{\phi})\big]\times\big[2e^{\alpha}\cos\beta\big]=\big[\sin\theta(e^{-\phi}+e^{\phi})\big]\times\big[-2e^{\alpha}\sin\beta\big],$$

এখানে আমরা প্রথম equation-টার LHS-কে দ্বিতীয়টার RHS দিয়ে গুণ করেছি, আর দ্বিতীয়টার LHS-কে গুণ করেছি প্রথমটার RHS দিয়ে। এবার দু দিক থেকে $2e^{\alpha}$ কেটে নিতে কোনো সমস্যা নেই, কারণ $e^{\alpha}\neq 0$.

or

$$\left[\cos\theta(e^{-\phi}-e^{\phi})\right]\times\left[\cos\beta\right]=\left[\sin\theta(e^{-\phi}+e^{\phi})\right]\times\left[-\sin\beta\right],$$

আমাদের দরকার $e^{2\phi}$. তাই e^{ϕ} দিয়ে দু পাশকে গুণ করে দাও--

or

$$\cos\theta\cos\beta(1-e^{2\phi})=-\sin\theta\sin\beta(1+e^{2\phi}),$$

or

$$(\sin\theta\sin\beta-\cos\theta\cos\beta)e^{2\phi}=-(\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta),$$

or

$$\cos(\theta+\beta)e^{2\phi}=\cos(\theta-\beta),$$

as required.

■

Exercise 16: If $\log\sin(\theta+i\phi)=\alpha+i\beta$, prove that $2\cos 2\theta=e^{2\phi}+e^{-2\phi}-4e^{2\alpha}$ and $\cos(\theta-\beta)=2^{2\phi}\cos(\theta+\beta)$, where α,β,θ,ϕ are real.[5] **(2009.1c)**

HINT:

এটা আগের অংকটারই একটু বিস্তারিত রূপ। দুটো জিনিস প্রমাণ করতে দিয়েছে, তার মধ্যে দ্বিতীয়টা আগের অংকেই প্রমাণ হয়ে গেছে। প্রথমটা কী করে করতে হবে, সেটা একটু ধরিয়ে দিচ্ছি। আগের অংকে আমরা এই দুটো equation পেয়েছিলাম--

$$\begin{aligned}\cos\theta(e^{-\phi}-e^{\phi}) &= -2e^{\alpha}\sin\beta,\\ \sin\theta(e^{-\phi}+e^{\phi}) &= 2e^{\alpha}\cos\beta.\end{aligned}$$

যেটা প্রমাণ করতে হবে তাতে কোনো β নেই। যদি দুটো equation-কে square করে যোগ করে দিই, তবে $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ হয়ে সব β দিব্যি কেটে যাবে। তারপর সামান্য একটু চট্‌কালেই প্রমাণটা হয়ে যাবে। চেষ্টা করেই দ্যাখো! ■

Example 33: If $\tan(\alpha+i\beta)=\tan\theta+i\sec\theta$, where α,β,θ are real and $0<\theta<\pi$, show that $e^{2\beta}=\cot\frac{\theta}{2}$ and $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$.[5] **(2014.6)**

SOLUTION:

Let $z=\alpha+i\beta$.

Then $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\times\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$.

So we have

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=-\sec\theta+i\tan\theta=\frac{-1+i\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Applying componendo-dividendo,

$$e^{2iz}=\frac{\cos\theta-1+i\sin\theta}{\cos\theta+1-i\sin\theta}.$$

Componendo-dividendo করার সময়ে সব সময়ে সতর্ক থাকা উচিত যাতে শূন্য দিয়ে ভাগ না হয়ে যায়। এখানে নীচের তলায় আছে $\cos\theta+1-i\sin\theta$, যেটা শূন্য হতে পারে না কারণ--

> Here $\cos\theta + 1 - i\sin\theta \neq 0$ Since $0 < \theta < \pi$.

এটাকে আরেকটু সাজিয়ে লেখা যায়।

> Writing $s = \sin\theta$ and $c = \cos\theta$, we have
>
> $$\begin{aligned}\frac{c-1+is}{c+1-is} &= \frac{(c-1+is)(c+1+is)}{(c+1-is)(c+1+is)}\\ &= \frac{(c+is)^2-1}{(c+1)^2+s^2}\\ &= \cdots\\ &= \frac{s}{1+c}\times i(c+is)\\ &= \frac{s}{1+c}e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad [\because i = e^{i\pi/2}].\end{aligned}$$

এইখানে ... বলে যে কটা ধাপ বাদ দিয়েছি, সেখানটায় $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ব্যবহার করতে হবে।

> So
>
> $$e^{2iz} = \frac{s}{1+c}e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}. \qquad (*)$$

এতক্ষণ আমরা $z = \alpha + i\beta$ দিয়ে সব কিছু লিখছিলাম। এবার z-এর পেটের ভিতর থেকে α আর β-কে বার করে আনার সময় হয়েছে--

> Now, Since $z = \alpha + i\beta$, hence
>
> $$e^{2iz} = e^{-2\beta+2i\alpha}.$$
>
> So $|e^{2iz}| = e^{-2\beta}$ and 2α can be anything in $\arg(e^{2iz})$.
>
> From $(*)$ we have $|e^{2iz}| = \left|\frac{s}{1+c}\right| = \frac{s}{1+c}$, Since $\theta \in (0,\pi)$.

এখানে $\theta \in (0,\pi)$ লাগল, কারণ সেই জন্যই $\frac{s}{1+c} > 0$ হচ্ছে।

> Hence
>
> $$e^{2\beta} = \frac{1}{|e^{2iz}|} = \frac{1+c}{s} = \cdots = \sqrt{\cot^2\frac{\theta}{2}}.$$

এইখানে ... বলে যে কটা ধাপ বাদ দিয়েছি, সেখানটায় একটা ছোট্টো কৌশল লাগালে সুবিধা হবে, যেটা হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে শিখেছিলে, $\sin\theta$ আর $\cos\theta$-কে $t = \tan\frac{\theta}{2}$ দিয়ে প্রকাশ করা--

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ আর } \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}.$$

এবার $\sqrt{\cot^2\frac{\theta}{2}}$ দেখেই নিশ্চয়ই $\cot\frac{\theta}{2}$ লিখে দিতে ইচ্ছে করছে? দাঁড়াও, তার আগে দেখতে হবে $\cot\frac{\theta}{2} \geq 0$ কিনা। এখানে অবশ্য সমস্যা হবে না, কারণ--

Since $0 < \theta < \pi$, hence $\cot\frac{\theta}{2} > 0$. So

$$e^{2\beta} = \sqrt{\cot^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2},$$

as required.

এইবার অংকের দ্বিতীয় অংশ। এখানে $\arg(e^{2iz})$ বার করতে হবে।

Again, by (*), we have

$$\arg(e^{2iz}) = \left\{\theta + \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

So α can be anything in $\left\{\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} + n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$, as required.

■

Example 34: If n is a positive integer, prove that

$$(a+ib)^n + (a-ib)^n = 2(a^2+b^2)^{n/2}\cos\left(n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

[3] **(2015.5a)**

SOLUTION: এখানে আন্দাজ করা যাচ্ছে যে, $a, b, \in \mathbb{R}$ ধরে নিতে হবে, এবং $a \neq 0$ হতে হবে (নইলে a দিয়ে ভাগ করা যেত না)। কিন্তু তাতেও অংকটা ঠিক হচ্ছে না। যেমন যদি $a = -1$, $b = 0$ আর $n = 1$ নিই, তবে LHS হচ্ছে -2. কিন্তু RHS হচ্ছে 2. যদি $a > 0$ ধরে নিই, তবে অবশ্য অংকটা করা যায়। আমরা সেভাবেই করব।

Here we assume $a, b \in \mathbb{R}$ and $a > 0$.
So $a + ib = re^{i\theta}$, where $r = \sqrt{a^2+b^2}$ and $\theta = \text{Arg}(a+ib)$.
Also, its conjugate is $a - ib = re^{-i\theta}$.

Now, by Euler's formula,

$$\begin{aligned} e^{n\theta} &= \cos n\theta + i\sin n\theta, \\ e^{-n\theta} &= \cos n\theta - i\sin n\theta. \end{aligned}$$

So $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta) = 2\cos(n\text{Arg}(\theta))$.
Since $a > 0$, hence $a + ib$ lies in the 1-st or 4-th quadrant. So $\text{Arg}(a+ib) = \tan^{-1}\frac{b}{a}$.

Hence

$$\begin{aligned}(a+ib)^n+(a-ib)^n &= r^n e^{in\theta}+r^n e^{-in\theta}\\ &= 2r^n\cos(n\theta)\\ &= 2r^n\cos(n\mathrm{Arg}(\theta))\\ &= 2(a^2+b^2)^{n/2}\cos\left(n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right),\end{aligned}$$

as required.

■

Exercise 17: If α and β are real and $|\cos(\alpha+i\beta)|=1$, then prove that $\sin^2\alpha=\sinh^2\beta$.[3] **(2016.6a)**

HINT:

$\cos(\alpha+i\beta)=\frac{e^{i(\alpha+i\beta)}+e^{-i(\alpha+i\beta)}}{2}=\cdots=\cos\alpha\cosh\beta+i\sin\alpha\sinh\beta.$

So the given condition implies

$$(\cos\alpha\cosh\beta)^2+(\sin\alpha\sinh\beta)^2=1.$$

We know that $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ and $\cosh^2\beta=1-\sinh^2\beta$.

এবার বাকিটুকু নিজে করতে পারা উচিত।

■

Answers

1. (i) Circle, centre $-i$ আর radius 1. (ii) Circle, centre $-i/2$ আর radius $5/2$. (iii) $-i/2$ এবং i-এর মধ্যবর্তী perpendicular bisector, মানে $y=\frac{1}{4}$ সরলরেখাটা। (iv) $y=-3$ সরলরেখাটা।
2. $\left\{\frac{1}{2}\log 2+\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)i\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. **6.** $\sinh z=\cos y\sinh x+i\sin y\cosh x$. তাই horizontal লাইনরা যাবে hyperbola-তে, আর vertical লাইনরা যাবে ellipse-এ। সুতরাং $\cosh z$-এর মতই, তবে hyperbola-গুলো উপর-নীচে খুলবে। **7.** একটা উত্তর হল $\frac{2\pi i}{3}$. আরও অসংখ্য উত্তর সম্ভব।
8. $\{\log(2+\sqrt{5})+2n\pi i\ :\ n\in\mathbb{Z}\}\cup\{\log(\sqrt{5}-2)+(2n+1)\pi i\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$. **9.** LHS-এর জন্য একটা বা তিনটে vertical লাইন লাগবে, RHS-এর জন্য একটা বা দুটো। যেহেতু LHS=RHS বলা আছে, তার মানে দু দিকেই ঠিক একটা vertical লাইন লাগবে। সেটা হতে পারে খালি $a=\pm1$-এর জন্য। এদিকে $a>0$ বলা আছে। তাই $a=1$.
11. $\cosh z$-এর বেলায় vertical লাইনগুলো ellipse আর horizontal লাইনগুলো hyperbola হয়। কিন্তু $\sin z$-এর বেলায় উল্টো, horizontal-রা ellipse, আর vertical-রা hyperbola হয়।
13. $\sin^{-1}(i)=\{\log(-1+\sqrt{2})+2n\pi i\ :\ n\in\mathbb{Z}\}\cup\{\log(1+\sqrt{2})+(2n+1)\pi i\ :\ n\in\mathbb{N}\}$. ওদিকে $\sin^{-1}(-i)=-\sin^{-1}(i)$.

Chapter II
Limit, continuity ইত্যাদি

DAY 7
Real analysis-এর উত্তরাধিকার (part 1)

7.1 গোড়ার কথা

গত অধ্যায়ে আমরা $\mathbb{C}$-এর উপরে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি এবং বিভিন্ন function আলোচনা করেছি। তার মধ্যে কোনো complex analysis-এর ধারণা খুব একটা এখনো আসে নি। এইবার আমরা complex analysis-এর আলোচনা বিস্তারিতভাবে শুরু করব। ব্যাপারটা একেবারেই real analysis-এর মত। একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে, real analysis-এর মূলে রয়েছে দুটো real সংখ্যার মধ্যে দূরত্বের ধারণাটা, যেটা আমরা মাপতাম absolute value দিয়ে--

$$|x - y|.$$

এই দূরত্ব থেকে আসত **neighbourhood**-এর ধারণা, বিশেষ করে ϵ-neighbourhood-এর ধারণাটা, কোনো $a \in \mathbb{R}$-এর থেকে $< \epsilon$ দূরত্বে যে সব real সংখ্যা আছে, তাদের সেটটা--

$$N(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - a| < \epsilon\}.$$

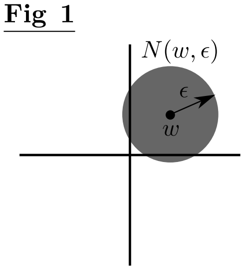
সেখান থেকেই আসত আরো যত রাজ্যের প্রয়োজনীয় জিনিস, open set, closed set, limit point, continuity, limit ইত্যাদি প্রভৃতি।

Complex analysis-এও ব্যাপারগুলো ঠিক একইরকম। এখানেও শুরু করব দূরত্বের ধারণা দিয়ে। বলাই বাহুল্য যে, দুটো complex সংখ্যার মধ্যে দূরত্ব মাপব modulus দিয়ে $|z - w|$. এর পরে বাকি সব real analysis-এর মতই। যেমন ধরো ϵ-neighbourhood-এর সংজ্ঞা হবে

$$N(w, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - w| < \epsilon\}.$$

ছবি দিয়ে ভাবলে এটা একটা চাকতির মত (Fig 1), যার centre হল w-তে, আর radius হল ϵ. লক্ষ করো, পরিধিটা কিন্তু $N(w, \epsilon)$-এর মধ্যে নেই। এখানে w হল একটা complex সংখ্যা আর $\epsilon > 0$ হল একটা real সংখ্যা।

Fig 1



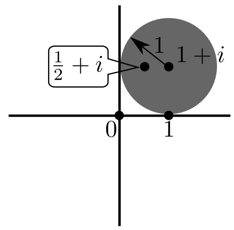


Fig 2

Example 1: $N(1+i,1)$-এর ছবি আঁকো। বলো তো 0, 1 আর $\frac{1}{2}+i$-এর মধ্যে কে বা কারা এর ভিতরে আছে!

SOLUTION:ছবিটা Fig 2-এর মত। ছবিতে 0, 1 আর $\frac{1}{2}+i$-ও দেখিয়েছি। ছবি থেকেই দেখতে পাচ্ছ 0 আছে বাইরে, $\frac{1}{2}+i$ আছে ভিতরে। ওদিকে 1 আছে ঠিক পরিধির ওপর, যেহেতু পরিধিটা $N(1+i,1)$-এর বাইরে, তাই $1 \not\in N(1+i,1)$. ছবি ছাড়াও অবশ্য করা যায়। যেমন $|0-(1+i)| = \sqrt{2} \geq 1$, তাই 0 আছে বাইরে। আবার $|1-(1+i)| = 1 \geq 1$, তাই 1-ও বাইরে। কিন্তু $\left|\frac{1}{2}+i-(1+i)\right| = \frac{1}{2} < 1$, তাই $\frac{1}{2}+i$ আছে ভিতরে। ■

Exercise 1: নীচের complex সংখ্যাদের মধ্যে কে বা কারা $N(i,2)$-এর মধ্যে আছে?

$$-i,\ 0,\ 1,\ -1,\ i,\ 2i,\ 3i.$$

■

Open set-এর সংজ্ঞাও real analysis-এর মত--কোনো $U \subseteq \mathbb{C}$-কে open in $\mathbb{C}$ বলব যদি U-এর মধ্যে যে কোনো বিন্দুকে ঘিরেই চারপাশে হাতপা খেলাবার একটু অন্ততঃ জায়গা থাকে, মানে--

> DEFINITION: **Open set**
>
> A set $U \subseteq \mathbb{C}$ is called **open** in $\mathbb{C}$ if
>
> $$\forall w \in U \quad \exists \delta > 0 \quad N(w,\delta) \subseteq U.$$

Example 2: $U = \{z \in \mathbb{C} \ :\ \mathrm{Re}(z) < 1\}$ কী $\mathbb{C}$-এর মধ্যে open? আর $V = \{z \in \mathbb{C} \ :\ \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$?

SOLUTION:এই ধরণের প্রশ্নের উত্তর চট্ করে আন্দাজ করার কায়দা হল এইটা দেখা যে, set-টার boundary-টা set-টার ভিতরে নাকি বাইরে? যদি boundary-র কোনো অংশ set-টার ভিতরে থাকে, তবে open হবে না, নইলে হবে। ব্যাপারটা ছবি এঁকে বুঝে নেওয়া যাক। Fig 3-এ প্রথম set-টার ছবি দিয়েছি। এখানে boundary-টা পুরোটাই set-এর বাইরে, তাই open হবে। সেটা সংজ্ঞা দিয়ে প্রমাণ করব এইভাবে--

To show

$$\forall w \in U \quad \exists \delta > 0 \quad N(w,\delta) \subseteq U.$$

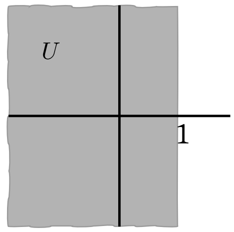


Fig 3

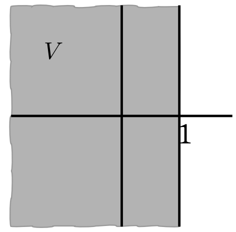


Fig 4

$\boxed{\forall w}$ Take any $w \in U$.

এবার এমনভাবে $\delta > 0$ নেব যাতে $N(w,\delta)$-টা boundary পার না করে।

Then $\mathrm{Re}(w) < 1$.

$\boxed{\exists \delta}$ Choose $\delta = 1 - \mathrm{Re}(w)$.

এর ফলে $N(w,\delta)$-টা boundary-র গা পর্যন্ত যাবে। এর চেয়ে ছোটো কোনো $\delta > 0$ নিলেও চলত।

Then $N(w,\delta) \subseteq U$, as required.

Fig 4-তে V-কে দেখিয়েছি। এখানে আবার boundary-টা পুরোটাই set-এর ভিতরে। Boundary-র খানিকটাও যদি set-এর ভিতরে থাকে, তবে set-টা open হতে পারে না--

Shall show

$$\neg(\forall w \in U \quad \exists \delta > 0 \quad N(w,\delta) \subseteq U),$$

ie,

$\exists w \in U \quad \forall \delta > 0 \quad N(w,\delta) \not\subseteq U.$

এটা পেলাম $\forall$-গুলোকে $\exists$ আর $\exists$-গুলোকে $\forall$ করে দিয়ে, এবং সব শেষের $\subseteq$-কে $\not\subseteq$ বানিয়ে।

$\boxed{\exists w}$ Choose $w = 1$.

Boundary-র যে অংশটা set-টার ভিতরে সেখানে থেকে যে কোনো point নিলেই চলত।

$\boxed{\forall \delta}$ Take any $\delta > 0$.

Then $1 + \frac{\delta}{2} \in N(w,\delta)$ but $1 + \frac{\delta}{2} \notin V$.

So $N(w,\delta) \not\subseteq V$, as required.

■

Real analysis-এ আমরা open set-দের complement-দের closed set বলতাম। এখানেও ঠিক তাই-ই বলব।

DEFINITION: Closed set

A set $U \subseteq \mathbb{C}$ is called **closed** in $\mathbb{C}$ if U^c is open in $\mathbb{C}$.

এইবার আমরা কোনো $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ দেওয়া থাকলে তার continuity নিয়ে আলোচনা করব। এখানেও আমরা real analysis-কেই নকল করব। প্রথমে তাই real analysis-এর থেকে continuity-র ধারণাটা একবার মনে করিয়ে দিই। ধরো $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ এবং $a\in\mathbb{R}$ দেওয়া আছে। তবে আমরা বলব "$f(x)$ is continuous at $x=a$" যদি এই শর্তটা পালিত হয়--

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in N(a,\delta) \quad f(x)\in N(f(a),\epsilon).$$

সহজ ভাষায়, যদি x-টা a-র যথেষ্ট কাছে থাকে (δ দূরত্বের মধ্যে), তবে $f(x)$-ও $f(a)$-র যথেষ্ট কাছে থাকবে (ϵ দূরত্বের মধ্যে)।
Complex analysis-এও আমরা continuity-র জন্য হুবহু একই সংজ্ঞা ব্যবহার করব--

DEFINITION: Continuous (version 1)

Let $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ be any function. Let $a\in\mathbb{C}$. We say that $f(z)$ is **continuous** at $z=a$ if

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall z\in N(a,\delta) \quad f(z)\in N(f(a),\epsilon).$$

আমরা continuity-র যে সংজ্ঞা দিলাম তাতে $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ধরে নিয়েছি, অর্থাৎ f-টা পুরো $\mathbb{C}$-এর উপরেই defined. অনেক সময়ে এমন f নিয়েও কাজ করতে হতে পারে যেটা খালি কোনো $D\subseteq\mathbb{C}$-এর উপরে defined, মানে $f:D\to\mathbb{C}$. সেখানেও প্রায় একই সংজ্ঞা খাটবে, খালি $f(z)$ বার করার আগে খেয়াল রাখতে হবে যাতে z-টা D-এর মধ্যে থাকে। তাই সংজ্ঞাটা দাঁড়াবে এইরকম--

DEFINITION: Continuous (version 2)

Let $\underbrace{D\subseteq\mathbb{C}}$. Let $f:D\to\mathbb{C}$ be any function. Let $\underbrace{a\in D}$. We say that $f(z)$ is **continuous** at $z=a$ if

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in N(a,\delta)\underbrace{\cap D} \quad f(x)\in N(f(a),\epsilon).$$

এই সংজ্ঞায় যেখানে যেখানে D এসেছে সেই জায়গাগুলোর নীচে ব্র্যাকেট করে দিয়েছি যাতে চোখ এড়িয়ে না যায়। লক্ষ করো, এখানে $D=\mathbb{C}$ বসালে এটা আগের সংজ্ঞাটায় পরিণত হয়।
নীচের অংক দুটো সরাসরি continuity-র সংজ্ঞা ব্যবহার করেই করা যাবে।

Example 3: Using definition show that the function defined by $f(z)=z+i(z+\bar{z})$ $(z\in\mathbb{C})$ is continuous at $z=1+i$.[3] **(2017.6aii)**
SOLUTION: প্রথমে $1+i$-কে একটা নাম দিয়ে নিই--

Let $a = 1 + i$.

শুরু করব সংজ্ঞা থেকে। এখানে domain হল পুরো $\mathbb{C}$, তাই সংজ্ঞার প্রথম সংস্করণটা ব্যবহার করব--

To show

$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall z \in N(a, \delta) \quad f(z) \in N(f(a), \epsilon).$

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার আছে একটা $\exists\delta > 0$. তার মানে খানিকক্ষণ মাথা চুলকে একটা জুৎসই $\delta > 0$ খাড়া করতে হবে যাতে যেকোনো $z \in N(a, \delta)$-র জন্যই $f(z) \in N(f(a), \epsilon)$ হয়, মানে $|f(z) - f(a)| < \epsilon$ হয়। তার জন্য একটু রাফ্ করে নিই--

$$f(z) - f(a) = z + i(z - \bar{z}) - a - i(a - \bar{a}) = (1 + i)(z - a) - i(\bar{z} - \bar{a}).$$

সুতরাং triangle inequality বলছে

$$|f(z)-f(a)| \leq |(1+i)(z-a)-i(\bar{z}-\bar{a})| \leq |(1+i)(z-a)|+|i(\bar{z}-\bar{a})| = \sqrt{2}|z-a|+|z-a| = (1+\sqrt{2})|z-a|,$$

যেহেতু $|1 + i| = \sqrt{2}$ এবং $|\bar{z} - \bar{a}| = |z - a|$. সুতরাং একে $< \epsilon$ রাখার জন্য $|z - a|$-কে $< \frac{\epsilon}{1+\sqrt{2}}$ রাখলেই চলবে।

$\boxed{\exists\delta}$ Choose $\delta = \frac{\epsilon}{1+\sqrt{2}} > 0$.

$\boxed{\forall z}$ Take any $z \in N(a, \delta)$.

এবার রাফ্টাকে গুছিয়ে লিখে দিলেই হবে--

$f(z) - f(a) = z + i(z - \bar{z}) - a - i(a - \bar{a}) = (1 + i)(z - a) - i(\bar{z} - \bar{a}).$

So, by triangle inequality,

$$|f(z) - f(a)| \leq |1 + i| \cdot |z - a| + |i| \cdot |\bar{z} - \bar{a}| = (1 + \sqrt{2})|z - a| < (1 + \sqrt{2})\delta = \epsilon,$$

as required.

■

এবার একটা উদাহরণ দেখি যেখানে continuous নয় দেখাতে হবে।

Example 4: Let

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|z|}{\mathrm{Re}(z)} & \text{if } \mathrm{Re}(z) \neq 0 \\ 0 & \text{if } \mathrm{Re}(z) = 0. \end{cases}$$

Show that f is not continuous at $z = 0$.[3] **(2006.13aii)**

SOLUTION:

Shall show

$\exists\epsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists z \in N(0,\delta) \quad f(z) \notin N(f(0),\epsilon).$

এটা পেয়েছি continuous-এর সংজ্ঞার negation নিয়ে। এবার আছে $\exists\epsilon > 0$. একটা উপযুক্ত ϵ পাওয়ার জন্য $f(z)$-এর কিছু value বার করে দেখা যাক। যদি $z = 1$ হয় তবে $f(z) = 1$ হবে, যদি $z = 2$ হয়, তবেও দ্যাখো $f(z) = 1$-ই হবে। বস্তুতঃ z যেকোনো positive real সংখ্যা হলেই $f(z) = 1$ হবে। কিন্তু $z = 0$ হলেই ঝপ করে $f(z) = 0$ হয়ে যাচ্ছে, মানে একটা লাফ মারছে, লাফের পরিমাণটা হল $1 - 0 = 1$. সুতরাং এই 1-এর চেয়ে ছোটো যেকোনো $\epsilon > 0$ নিলেই কাজ চলবে। ধরো $\frac{1}{2}$ নিলাম--

$\boxed{\exists\epsilon}$ Choose $\epsilon = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\forall\delta}$ Take any $\delta > 0$.

এবার একটা z নিতে হবে। তার কায়দাটা তো আমরা জানিই, $N(0,\delta)$-র যেকোনো positive real সংখ্যা নিলেই চলবে। এমন একটা সংখ্যা হল $\frac{\delta}{2}$. অতএব--

$\boxed{\exists z}$ Choose $z = \frac{\delta}{2} \in N(0,\delta)$.

Then $f(z) = 1 \notin N(f(0),\epsilon)$, as required.

■

7.2 Real আর imaginary-তে ভেঙে

একটা complex সংখ্যাকে যেমন real আর imaginary অংশে ভেঙে লেখা যায়, তেমনি একটা complex function-কেও তার real আর imaginary অংশে ভেঙে লেখা যায়।

Example 5: ধরো $f(z) = z^2$. এর real আর imaginary অংশ বার করো।

SOLUTION: প্রথমে $z = x + iy$ আকারে লেখো, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. তাহলে z^2 হবে $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. অতএব $f(z)$-এর real অংশ হল $x^2 - y^2$ আর imaginary অংশ হল $2xy$. ■

Exercise 2: এই function-গুলোকে real আর imaginary অংশে ভেঙে লেখো।
(i) z^3 (ii) e^z (iii) $\frac{1}{z}$, যেখানে $z \neq 0$.
■

ধর দুটো complex সংখ্যা আছে--$z = x + iy$ আর $w = a + ib$, যেখানে $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. তাহলে বুঝতেই পারছ যে--

> z আর w যদি পরস্পরের খুব কাছাকাছি থাকে, তবে x আর a-ও পরস্পরের খুব কাছে থাকবে, এবং y আর b-ও তাই থাকবে।

বিপরীতপক্ষে--

> যদি x, a পরস্পরের কাছাকাছি থাকে আর y, b-ও পরস্পরের কাছাকাছি থাকে, তবে z আর w-ও পরস্পরের খুব কাছাকাছি থাকতে বাধ্য।

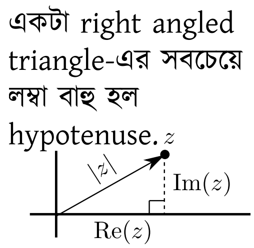


Fig 5

এই ব্যাপারটা অনেক সময়েই কোনো কিছু প্রমাণ করতে কাজে লাগে। তাই অংকের ভাষায় গুছিয়ে কী করে এদেরকে প্রমাণ করতে হয়, সেটা শিখে রাখা যাক। যে কোনো একটা $\epsilon > 0$ নাও। তাহলে--

- $|z - w| < \epsilon \implies |x - a| < \epsilon$ এবং $|y - b| < \epsilon$. প্রমাণ অতি সহজ, Fig 5 দেখলেই বুঝবে যেকোনো complex সংখ্যার ক্ষেত্রেই modulus-টা তার real আর imaginary অংশের চেয়ে বড় (বা সমান) হয়, তাই $|x - a| = |\text{Re}(z - w)| \leq |z - w| < \epsilon$. একইভাবে $|y - b| = |\text{Im}(z - w)| \leq |z - w| < \epsilon$.
- বিপরীতপক্ষে, $|x - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, |y - b| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \implies |z - w| < \epsilon$. এটার প্রমাণ হবে Pythagoras' theorem দিয়ে--
$$|z - w|^2 = |x - a|^2 + |y - b|^2 < \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 = \epsilon^2.$$

আমরা দেখলাম যে, যেকোনো $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$-এর পেটের মধ্যেই দুটো function ঢুকে আছে, f-এর real আর imaginary অংশ, যারা $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. যেমন $f(z) = e^z$ হলে তার real অংশ হল $u(x, y) = e^x \cos y$ এবং imaginary অংশ হল $v(x, y) = e^x \sin y$. আন্দাজ করা কঠিন নয় যে, $u(x, y)$ এবং $v(x, y)$-এর ধর্মের সঙ্গে $f(z)$-এর বিভিন্ন ধর্মের অঙ্গাঙ্গি সম্পর্ক থাকবে। এবার সেরকম একটা জিনিসই আমরা শিখব।

Example 6: Show that the function $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ such that $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ is continuous at $z_0 = x_0 + iy_0$ if and only if u and v are both continuous at (x_0, y_0).[5] **(2017.6c)**

SOLUTION:

> To show:
>
> f continuous at $z_0 \iff u, v$ both continuous at (x_0, y_0).

আশা করি মনে আছে যে continuity-র সংজ্ঞায় neighbourhood ব্যবহার করতে হয়। আমাদের এখানে দুই ধরণের neighbourhood লাগবে, $\mathbb{C}$-এর জন্য এবং $\mathbb{R}^2$-এর জন্য। প্রথমে এই দুই ধরণের neighbourhood-এর দুটো আলাদা নাম দিয়ে রাখি--

> Let, for $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ and $\delta > 0$,
> $$N_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$
> and, for $z_0 \in \mathbb{C}$,
> $$N_{\mathbb{C}}(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < \delta\}$$

এবার প্রমাণ শুরু করা যাক। এটা একটা $\iff$-জাতীয় প্রমাণ। আমরা প্রথম $\Longleftarrow$ দিকটা দেখাব।

($\Longleftarrow$ part):

এবার লিখে নিই কি দেওয়া আছে--

We are given that $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are continuous at (x_0, y_0),
ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (x, y) \in N_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_1) \quad |u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \epsilon, \qquad \mathbf{(1)}$$

and

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall (x, y) \in N_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_2) \quad |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \epsilon, \qquad \mathbf{(2)}$$

এবার লিখি কী দেখাতে হবে--

Shall show that f is continuous at z_0,
ie,
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in N_{\mathbb{C}}(z_0, \delta) \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$

গোড়াতেই একটা $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

আমাদের উদ্দেশ্য হল $f(z)$-টাকে $f(z_0)$-এর ϵ দূরত্বের মধ্যে নিয়ে যাওয়া। f-এর real আর imaginary অংশ হল u, v. সুতরাং $u(x, y)$-কে $u(x_0, y_0)$-এর এবং $v(x, y)$-কে $v(x_0, y_0)$-এর কাছে নিয়ে যেতে হবে। ঠিক কতটা কাছে? উত্তরটা আমরা আগেই আলোচনা করেছি--$\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ দূরত্বের মধ্যে নিতে হবে।

Using $\epsilon/\sqrt{2}$ in place of ϵ in $(\mathbf{1})$ and $(\mathbf{2})$, we get δ_1 and δ_2.

$\boxed{\exists \delta}$ Choose $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

$\boxed{\forall z}$ Take any $z \in N_{\mathbb{C}}(z_0, \delta)$.

Then

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \sqrt{|u(x, y) - u(x_0, y_0)|^2 + |v(x, y) - v(x_0, y_0)|^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

এবার উল্টোদিকটা--

($\Longrightarrow$ part):

Given

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in N_{\mathbb{C}}(z_0, \delta) \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon. \qquad (\mathbf{3})$$

To show:

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (x, y) \in N_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_1) \quad |u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \epsilon,$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall (x, y) \in N_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_2) \quad |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \epsilon,$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

From $(\mathbf{3})$ we get a $\delta > 0$ for this ϵ.

$\exists \delta_1, \delta_2$ Choose $\delta_1 = \delta_2 = \delta > 0$.

$\forall (x, y)$ Take any $(x, y) \in N_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_1) = N_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_2)$.

We know that for any $w \in \mathbb{C}$ we have $|\text{Re}(w)|, |\text{Im}(w)| \le |w|$.

So $|u(x, y) - u(x_0, y_0)|, |v(x, y) - v(x_0, y_0)| \le |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, as required.

■

Exercise 3: Let G be an open disc in $\mathbb{R}^2$ and u, v be real-valued functions defined on G. Prove that $u + iv$ is continuous on G if and only if u, v are continuous on G.[5] **(2013.6b)**
HINT: প্রায় আগের অংকটাই। খালি এখানে function-টার domain পুরো $\mathbb{C}$ না দিয়ে খালি G দিয়েছে। G যে একটা open disc (অর্থাৎ $N(a, r)$ জাতীয় দেখতে) সেটা অনাবশ্যক শর্ত। প্রমাণটা একেবারেই আগের অংকটারই মত হবে, খালি এখানে continuity-র সংজ্ঞার version 2-টা ব্যবহার করতে হবে, মানে মনে করে করে জায়গামত $\cap G$ ঢোকাতে হবে। ■

Exercise 4: Consider $f : E(\subseteq \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ given by

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

where u, v are real-valued functions on E. Prove that f is continuous on $E(\subseteq \mathbb{C})$ if both u and v are continuous on $E(\subseteq \mathbb{R}^2)$.[3] **(2009.12bi)**
HINT: আগের অংকটাই, সামান্য অন্য ভাষায়। এখানে অবশ্য খালি একটা দিক দেখাতে বলেছে। ■

DAY 8
Real analysis-এর উত্তরাধিকার (part 2)

8.1 Limit

আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতে যখন continuity-র কথা প্রথম শিখি, তখন তার সংজ্ঞাটা সাধারণতঃ এইভাবে দেওয়া হয়--

> $f(x)$-কে $x = x_0$-এ continuous বলব যদি $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ হয়।

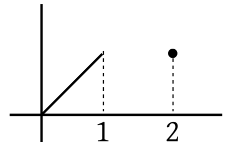


Fig 6

একইরকম জিনিস করা যায় complex সংখ্যাদের বেলাতেও। এবার সেটাই আমরা শিখব।
কিন্তু গোড়াতেই একটা জিনিস বলে নিই যে, continuity-র এই সংজ্ঞাটা কিন্তু সম্পূর্ণ নয়। এর অসম্পূর্ণতা কোথায় সেটা real analysis শেখার সময়েই শেখার কথা, কিন্তু অনেকেই দেখেছি সেই জায়গাটা খেয়াল করতে ভুলে যায়। তাই সেটা একটু আলোচনা করে নিই, কারণ complex analysis-এও সেটা কাজে লাগবে।
ধরো একটা function আছে $f : D \to \mathbb{R}$, যেখানে $D \subseteq \mathbb{R}$. তাহলে যেকোনো $a \in D$-এর জন্যই আমরা প্রশ্ন তুলতে পারি $f(x)$-টা $x = a$-তে continuous কিনা। কিন্তু যেকোনো $a \in D$-এর জন্যই $\lim_{x\to a} f(x)$ বার করা যায় না! Limit-টা বার করার জন্য a-কে D-এর একটা limit point হতে হবে (মানে D-এর অসংখ্য বিন্দু যেন a-র গায় গিয়ে ভীড় করে)। সুতরাং যদি এমন $a \in D$ নাও যেটা D-এর limit point নয়, তাহলে $\lim_{x\to a} f(x)$ হবে undefined, কিন্তু তাও $f(x)$-টা $x = a$-তে continuous হবেই। এরকম একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 7: ধরো $D = [0, 1] \cup \{2\}$. আমি $f : D \to \mathbb{R}$ দিচ্ছি এইরকম--

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in [0,1] \\ 1 & \text{if } x = 2 \end{cases} .$$

এর জন্য $\lim_{x\to 2} f(x)$ কী হবে? বলো তো, $f(x)$ কি $x = 2$-তে continuous? গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 6-এ।
SOLUTION: এখানে 2 মোটেই D-এর limit point নয় (বাকিদের থেকে একটু দূরে একা একা রয়েছে বলে)। তাই $\lim_{x\to 2} f(x)$ হল undefined.
কিন্তু continuous function-এর যে সংজ্ঞা আমরা real analysis-এর শিখি তা দিয়ে দেখাব যে, $f(x)$-টা $x = 2$-তে continuous. মানে

Shall show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(2, \delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(2), \epsilon).$

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার একটা জুৎসই $\delta > 0$ নিতে হবে। এখানেই আমরা এই তথ্যটা কাজে লাগাব যে, 2 আছে D-এর বাকি বিন্দুদের থেকে খানিকটা দূরে। আমরা δ নেব এমনভাবে যাতে 2-এর δ দূরত্বের মধ্যে D-এর আর কোনো বিন্দু না থাকে, মানে $N(2, \delta) \cap D$-এর মধ্যে খালি একা 2-ই থাকে। 2-এর সঙ্গে D-এর বাকি অংশের দূরত্ব হল 1. তাই 1-এর চেয়ে ছোটো যেকোনো δ নিলেই হবে (1-এর সমান হলেও চলবে)--

$\boxed{\exists \delta}$ Choose $\delta = \frac{1}{2} > 0$.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in N(2, \delta) \cap D = \{2\}$.

So $x = 2$, hence $f(x) = f(2) \in N(f(2), \epsilon)$, as required.

■

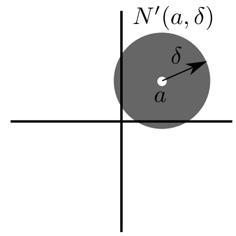


Fig 7

এবার আবার complex analysis-এ ফিরে আসি। ব্যাপারটা এখানেও একইরকম। তাই শুরু করব limit point-এর সংজ্ঞা দিয়ে। সেটাও real analysis-এর মতই। সেখানে সংজ্ঞাটা ছিল এইরকম--যদি $U \subseteq \mathbb{R}$ এবং $a \in \mathbb{R}$ হয়, তবে a-কে U-এর একটা **limit point** বলব যদি

$$\forall \delta > 0 \quad N'(a,\delta) \cap U \neq \phi$$

হয়। ছবি দিয়ে ভাবলে এর মানে ছিল--U-এর বিন্দুগুলো a-র গায় গিয়ে একটা জটলা পাকাচ্ছে। এখানে আমরা $N'(a,\delta)$ বলে একটা জিনিস ব্যবহার করেছি, একে বলে **deleted neighbourhood**, এর মানে হল $N(a,\delta)$ থেকে খালি a বিন্দুটা বাদ। Complex analysis-এর বেলাতেও একইরকম সংজ্ঞা কাজে দেবে, এখানে

$$N'(a,\delta) = N(a,\delta) \setminus \{a\}.$$

দেখতে মনে হবে যেন একটা চাকতি যার একেবারে মাঝখানে একটা ফুটো (Fig 7)। এবার deleted neighbourhood-এর সংজ্ঞা ব্যবহার করে limit point-এর সংজ্ঞা দাঁড়াবে এইরকম--

DEFINITION: **Limit point**

Let $D \subseteq \mathbb{C}$ and $a \in \mathbb{C}$. We say that a is a **limit point** of D if

$$\forall \delta > 0 \quad N'(a,\delta) \cap D \neq \phi.$$

Here $N'(a,\delta) = N(a,\delta) \setminus \{a\}$.

এবার limit-এর সংজ্ঞা লিখে ফেলতে পারব।

DEFINITION: **Limit**

Let $D \subseteq \mathbb{C}$ and $f : D \to \mathbb{C}$. Let $a \in \mathbb{C}$ be a limit point of D. Then for $\ell \in \mathbb{C}$ we say that $\lim_{z\to a} f(z) = \ell$ if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in N'(a,\delta) \quad f(z) \in N(f(a),\epsilon).$$

Continuity-র বেলায় যেমন আমরা real আর imaginary অংশে ভেঙে এগোতে পেরেছিলাম, limit বার করতে হলেও সেরকম করা যায়, মানে real আর imaginary অংশ দুটোর limit আলাদা করে বার করে তারপর ওদের মিলিয়ে দিলেই চলবে। এটাই দেখাতে বলেছে নীচের অংকটায়।

Example 8: Let f be defined on $D(\subseteq \mathbb{C})$. Let $f(z) = u(z) + iv(z)$ where $u(z) = u(x,y)$, $v(z) = v(x,y)$ are real-valued functions. Let $z_0 = x_0 + iy_0$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$ be a limit point of D. Show that $\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell_1 + i\ell_2$ if and only if

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \ell_1 \text{ and } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \ell_2.$$

[4] **(2007.13b)**

SOLUTION: অংকটা দেখতে বেশ বদ্খত্ গোছের। কী বলেছে বুঝে নেওয়া যাক। প্রথমে একটা function নিয়েছে $f(z)$, সেটার real অংশকে নাম দিয়েছে $u(z)$ আর imaginary অংশকে নাম দিয়েছে $v(z)$. এবার একটা গোলমেলে জিনিস বলেছে $u(z) = u(x,y)$. এর মানে হল $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ধরে $u(z)$-কে x আর y-এর function বলে ভাবছে। যেমন ধরো $u(z)$ যদি $|z|$ হয়, তবে $u(x,y)$ হবে $\sqrt{x^2+y^2}$. একইভাবে $v(z)$-কেও $v(x,y)$ বলে ভাবতে বলেছে। সুতরাং তোমার হাতে এখন তিনটে function--

- এক, $f(z)$ যেখানে z আর $f(z)$ হল complex সংখ্যা,
- দুই, $u(x,y)$ যেখানে x, y আর $u(x,y)$ হল real সংখ্যা,
- তিন, $v(x,y)$ যেখানে x, y আর $v(x,y)$ হল real সংখ্যা।

দেখাতে হবে যে, $f(z)$-এর limit বার করা আর $u(x,y)$ এবং $v(x,y)$-এর limit বার করা একই কথা। তার জন্য একটা $z_0 = x_0 + iy_0$ নেওয়া হয়েছে $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$, এবং এই তিনটে limit নিয়ে কাজ করা হচ্ছে--

$$\lim_{z\to z_0} f(z), \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \text{ আর } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y).$$

এইবার তবে লিখে নিই কী দেখাতে হবে--

To show

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell_1 + i\ell_2 \iff \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \ell_1 \\ \text{and} \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \ell_2. \end{cases}$$

$\implies$ part:

Shall show $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \ell_1$,

এই limit নেওয়া হচ্ছে $\mathbb{R}^2$-তে, পুরো সংজ্ঞাটা বিস্তারিতভাবে লিখলে হয়--

ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x,y) \in N'_{\mathbb{R}^2}((x_0,y_0),\delta) \cap D \quad u(x,y) \in N_{\mathbb{R}}(\ell_1, \epsilon).$$

এইখানে একটু notation-এর কারচুপি করেছি। D ছিল $\mathbb{C}$-এর একটা subset, আমরা চুপিচুপি সেটাকে $\mathbb{R}^2$-এর subset বানিয়ে দিয়েছি, আসলে $\mathbb{C}$ আর $\mathbb{R}^2$ তো বলতে গেলে একই জিনিস, $x + iy$-কে (x,y) ভাবলেই হল $(x, y \in \mathbb{R})$। আর একটা কথা, এখানে $N_{\mathbb{R}}$ মানে হল $\mathbb{R}$-এর মধ্যে neighbourhood, এবং $N_{\mathbb{R}^2}$ হল $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে neighbourhood.

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার আমাদের একটা জুৎসই $\delta > 0$ বার করতে হবে।

Since $\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell_1 + i\ell_2$, we know

$$\exists\delta > 0 \quad \forall z \in N'_{\mathbb{C}}(z_0, \delta) \quad f(z) \in N_{\mathbb{C}}(\ell_1 + i\ell_2, \epsilon).$$

এখানে $N_{\mathbb{C}}$ হল $\mathbb{C}$-র মধ্যে neighbourhood.

$\boxed{\exists\delta}$ Choose this $\delta > 0$.

$\boxed{\forall(x,y)}$ Take any $(x, y) \in N'_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta) \cap D$.

এবার দেখাতে হবে $u(x, y)$-টা ℓ_1-এর কাছাকাছি থাকবে। আমরা জানি যে, দুটো complex সংখ্যা পরস্পরের কাছাকাছি থাকলে তাদের real অংশগুলোও পরস্পরের কাছাকাছি থাকতে বাধ্য। সেটাই এখানে কাজে লাগবে।

Then

$$\begin{aligned} |u(x,y) - \ell_1| &\leq |f(z) - (\ell_1 + i\ell_2)| \quad [\because \forall z \in \mathbb{C} \quad |Re(z)| \leq |z|] \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

So $u(x, y) \in N_{\mathbb{R}}(\ell_1, \epsilon)$, as required.

$v(x, y)$-এর ব্যাপারটাও একইরকম। লিখে যথেষ্ট আঙুল ব্যথা হয়েই গেছে। আবার একই জিনিস আরেকবার না লিখে তাই "Similarly" বলে ছেড়ে দিই--

Similarly, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = \ell_2$.

এবার উল্টো দিকটা--

$\Longleftarrow$ part:

Given:

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta_1 > 0 \quad \forall(x, y) \in N'_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_1) \quad u(x, y) \in N_{\mathbb{R}}(\ell_1, \epsilon), \qquad \textbf{(1)}$$

and

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta_2 > 0 \quad \forall(x, y) \in N'_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), \delta_2) \quad v(x, y) \in N_{\mathbb{R}}(\ell_2, \epsilon). \qquad \textbf{(2)}$$

To show $\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell_1 + i\ell_2$, ie,

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall z \in N'_{\mathbb{C}}(z_0, \delta) \quad f(z) \in N_{\mathbb{C}}(\ell_1 + i\ell_2, \epsilon).$$

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

আবার সেই আগের গল্প-- f-কে $\ell_1 + i\ell_2$-এর ϵ দূরত্বের মধ্যে নিলেই হবে। তার জন্য u, v-কে ℓ_1, ℓ_2-র $\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ দূরত্বের মধ্যে নিতে হবে।

Taking $\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ in place of ϵ in (1) and (2) we get δ_1 and δ_2.

$\boxed{\exists\delta}$ Choose $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

$\boxed{\forall z}$ Take any $z \in N'_{\mathbb{C}}(z_0, \delta) \cap D$.

Then

$$\begin{aligned} |f(z) - (\ell_1 + i\ell_2)| &= \sqrt{(u(x,y) - \ell_1)^2 + (v(x,y) - \ell_2)^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Hence $f(z) \in N_{\mathbb{C}}(\ell_1 + i\ell_2, \epsilon)$, as required.

■

Exercise 5: Let $f : G \to \mathbb{C}$ be a function defined on a region G in $\mathbb{C}$ such that $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, where $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are real-valued functions defined on G $(z = x + iy, x, y \in \mathbb{R})$ except possibly at $z_0 = x_0 + iy_0$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$. Prove that

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

if and only if

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a \text{ and } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b.$$

[5] **(2011.12a)**
HINT: আগের অংকটাই, খালি limit point-এর শর্তটা বলতে ভুলে গেছে। ওটুকু তোমাকেই ধরে নিতে হবে, মানে ধরে নিতে হবে যে, z_0 হল G-এর একটা limit point. ■

8.2 Sequential criterion

Real analysis শেখার সময়ে আমরা continuity-র sequential criterion শিখি। জিনিসটা এইরকম, ধরো একটা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দেওয়া আছে, এবং বলা আছে এটা কোনো $a \in \mathbb{R}$-এ continuous. এবার তুমি যা খুশি একটা sequence নাও, $\{x_n\}_n$, যাতে $x_n \to a$ হয়, তবে $f(x_n) \to f(a)$ হতে বাধ্য। এইটা হল sequential criterion-এর একটা দিক। এর একটা উল্টো দিকও আছে। তার জন্য ফের একটা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নাও, আর যে কোনো $a \in \mathbb{R}$ নাও। এবার কিন্তু বলে দিচ্ছি না যে, f-টা a-তে continuous. কিন্তু এটা বলে দিচ্ছি যে, যাই sequence নাও কেন $\{x_n\}_n$ যাতে $x_n \to a$ হয়, তবে $f(x_n) \to f(a)$ হবেই। তাহলে f-টা a-তে continuous হতে বাধ্য।
একই রকম জিনিস খাটে complex analysis-এর ক্ষেত্রেও। প্রমাণটাও হুবহু একইরকম। সেটাই চেয়েছে নীচের অংকে।

Example 9: Let $f : U \to \mathbb{C}$ be a function $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ where $z = x + iy$. Let $z_0 = x_0 + iy_0$ be a point of the open subset U of $\mathbb{C}$. Show that f is continuous if and only if $f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$ for every sequence $\{z_n\}_n$ such that $z_n \in U$ for $n \in \mathbb{N}$ and $z_n \to z_0$ as $n \to \infty$.[5] **(2008.13b)**
SOLUTION: এখানে open subset-টাব্সেট বলে অনেক ভয় দেখিয়েছে। ওগুলোর এখানে আসলে কোনো দরকার নেই।

To show

f continuous at $z_0 \iff$ for all $\{z_n\}_n \subseteq U$ with $z_n \to z_0$ we have $f(z_n) \to f(z_0)$.

আমরা $\implies$ অংশটা প্রথমে দেখাই--

$\implies$ part:

Given: f continuous at z_0,

ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in N(z_0, \delta) \cap U \quad f(z_n) \in N(f(z_0), \epsilon). \qquad (\mathbf{1})$$

Let $\{z_n\}_n \subseteq U$ be any sequence with $z_n \to z_0$.

To show $f(z_n) \to f(z_0)$,

ie,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq K \quad f(z_n) \in N(f(z_0), \epsilon)$.

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

By $(\mathbf{1})$, we have $\delta > 0$ such that

$$\forall z \in N(z_0, \delta) \cap U \quad f(z) \in N(f(z_0), \epsilon). \qquad (\mathbf{2})$$

Since $z_n \to z_0$, so

$$\exists K \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq K \quad z_n \in N(z_0, \delta).$$

$\boxed{\exists K}$ Choose this $K \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq K$.

Then $z_n \in N(z_0, \delta)$. Hence, using $(\mathbf{2})$, $f(z_n) \in N(f(z_0), \epsilon)$, as required.

এবার উল্টো দিকটা--

$\impliedby$ part:

Given: for all $\{z_n\}_n \subseteq U$ with $z_n \to z_0$ we have $f(z_n) \to f(z_0)$.

To show f is continuous at z_0.

এবার আমরা contradiction দিয়ে প্রমাণ করব--

Let, if possible, f be not continuous at z_0,

এর মানে কী, সেটা অংকের ভাষায় লেখার জন্য "f is continuous at z_0"-এর সংজ্ঞাটার negation নিতে হবে, মানে--

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in N(z_0, \delta) \cap U \quad f(z) \in N(f(z_0), \epsilon)).$$

যাবতীয় $\forall$-গুলোকে $\exists$, আর $\exists$-গুলোকে $\forall$ করে দিলেই হবে, আর সব শেষের "$f(z) \in N(f(z_0), \epsilon)$"-টাকে উল্টে "$f(z) \notin N(f(z_0), \epsilon)$" করে দিলেই পাবে--

ie,

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists z \in N(z_0, \delta) \cap U \quad f(z) \notin N(f(z_0), \epsilon).$$

এই ϵ-টাকে আমরা স্থির রাখব। এরপর একটা $\forall\delta$ এবং তারপর $\exists z$ আছে। তার মানে প্রতিটা $\delta > 0$-এর জন্যই একটা করে z পাওয়া যাবে। যেহেতু $\exists z$-টা আছে $\forall\delta$-র পরে, তাই z-টা δ-র উপর নির্ভর করতে পারে, যেমন $\delta = 1$ নিলে যে z-টা পাবে, $\delta = \frac{1}{2}$ নিলে হয়তো অন্য কোনো z পাবে। আমরা δ-র জায়গায় $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$, ইত্যাদি $\frac{1}{n}$-জাতীয় সংখ্যা বসাব, এবং এর ফলে যে z-গুলো পাব তাদেরকে $z_1,\ z_2,\ z_3$, ইত্যাদি নাম দেব--

Taking $\delta = \frac{1}{n}$, we have

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists z_n \in N\left(z_0, \tfrac{1}{n}\right) \cap U \quad f(z_n) \notin N(f(z_0), \epsilon).$$

Clearly, $z_n \to z_0$, (Since $|z_n - z_0| < \frac{1}{n} \to 0$).

But since $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(z_n) - f(z_0)| \geq \epsilon > 0$, hence $f(z_n) \not\to f(z_0) (\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

নীচের অংকটা আমরা আগেই দেখেছিলাম Example 4-এ। এখানে সেই একই অংক আরেকবার করব, কিন্তু এবার করব sequential criterion দিয়ে।

Example 10: Let

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|z|}{Re(z)} & \text{if } Re(z) \neq 0 \\ 0 & \text{if } Re(z) = 0. \end{cases}$$

Show that f is not continuous at $z = 0$.[3] **(2006.13aii)**

SOLUTION: এই function-টার যে বৈশিষ্ট্যটা আমরা আগে কাজে লাগিয়েছিলাম, সেটা এখানেও কাজ লাগবে--যদি z কোনো positive real সংখ্যা হয়, তবে $f(z) = 1$ হয়, ওদিকে $f(0) = 0$. তার মানে positive real axis বরাবর 0-র দিকে এগোতে থাকলে এক সময়ে f-টা ঝপ্ করে 1 ঘর লাফ মেরে নেমে আসে। এই "positive real axis বরাবর 0-র দিকে এগিয়ে আসা" ব্যাপারটা এখানে আমরা $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$ দিয়ে করব--

If we take $z_n = \frac{1}{n}$, then $z_n \to 0$, but

$$f(z_n) = f(\tfrac{1}{n}) = \frac{|1/n|}{Re(1/n)} = 1 \to 1 \neq 0.$$

এখানে আমরা $1 \to 1$ লিখেছি। সেটা দেখে একটু অদ্ভুত লাগতে পারে। আসলে যাই $n \in \mathbb{N}$ নাও না কেন, $f(z_n) = 1$ হবে। তাই $f(z_n)$-এর sequence-টা হল $1, 1, 1, 1, ...$, যেটার limit-ও 1 হতে বাধ্য।

So, by sequential criterion of continuity, $f(z)$ is not continuous at $z = 0$.

■



Fig 8

DAY 9
Riemann sphere (part 1)

9.1 ∞-র গল্প

সাধারণতঃ $\mathbb{R}$-কে আমরা একটা লম্বা লাইন বলে কল্পনা করে থাকি, যেটা ধরে সোজা ডানদিকে এগোলে ∞-র দিকে যাওয়া হয়, আর বাঁদিকে গেলে $-\infty$-র দিকে। যদিও আমরা জানি যে, ∞ বা $-\infty$ মোটেই $\mathbb{R}$-এর মধ্যে নেই, তাও কোথায় যেন মনের মধ্যে এইরকম একটা ছবি এসেই যায় যে, ওরা যেন দুটো বিন্দু, ∞ হল real line-এর একেবারে ডান প্রান্তের বিন্দুটা, আর $-\infty$ হল একেবারে বাঁ প্রান্তের বিন্দুটা। ছবিটা মোটেই ঠিক নয়, কারণ real line-এর কোনো দিকেই শুরু বা শেষ নেই, তাই প্রান্তেরও প্রশ্ন নেই। কিন্তু তাও এইভাবে দুটো প্রান্ত কল্পনা করে নেওয়াটা আমাদের বাস্তব জীবনের অভিজ্ঞতার সঙ্গে খাপ খেয়ে যায়। ধরো তুমি একটা লম্বা সোজা রেল লাইনের পাশে দাঁড়িয়ে আছ (Fig 8)। যদি সোজা ডান দিকে তাকাও, তবে মনে হবে যেন লাইন দুটো ক্রমশঃ একটা বিন্দুতে মিলিত হচ্ছে। এই বিন্দুটা আসলে কোথাও নেই, স্রেফ দৃষ্টিবিভ্রম, কিন্তু তাও এই বিন্দুটাই হল আমাদের কাছে ∞-র সবচেয়ে বাস্তব সংস্করণ। একইভাবে বাঁদিকে তাকালেও দেখবে লাইন দুটো যেন একটা বিন্দুতে মিলিত হচ্ছে, সেটাই $-\infty$-র সবচেয়ে প্রত্যক্ষ রূপ। এবার একই রকম একটা জিনিস করব $\mathbb{C}$-এর বেলায়। অবশ্য $\mathbb{C}$ মোটেই ঠিক একটা লম্বা লাইন নয়। বরং একটা মস্ত বড় প্রান্তরের মত। কল্পনা করো তুমি সেই মাঠের মাঝখানে দাঁড়িয়ে আছ। তোমার চোখে কিন্তু প্রান্তরটা মোটেই অসীম বলে ঠেকবে না। দৃষ্টিবিভ্রমের কারণে মনে হবে যেন প্রান্তটার একটা গোল প্রান্ত আছে, যাকে বলে দিগন্ত রেখা, যেখানে মাটি আর আকাশ মিলিত হয়েছে। ওই দিগন্ত রেখাটাই হল $\mathbb{C}$-এর ∞. অবশ্য এটা হল গিয়ে দৃষ্টিবিভ্রমের কল্পনা। এটাকে এবার অংকের ভাষায় লেখার চেষ্টা করব। Real analysis করার সময়ে আমরা কিন্তু ∞ বা $-\infty$-কে সরাসরি define করতাম না, আমরা define করতাম $x \to \infty$ বা $x \to -\infty$ বলতে কী বোঝায়, বা $f(x) \to \infty$ মানে কী, এইসব। যেমন ধরো আমরা জানি $x \to \infty$ হলে $e^{-x} \to 0$ হয়। অংকের ভাষায় বিশদ করলে এর মানে হল--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \underbrace{\exists M > 0 \quad \forall x > M} \quad e^{-x} \in N(0, \epsilon).$$

এখানে যে অংশটার তলায় ব্র্যাকেট করে দিয়েছি, সেইটাই হল $x \to \infty$-র অবদান। একইভাবে যখন বলি $x \to 0$ হলে $\frac{1}{x^2} \to \infty$ হয়, তার মানে হল

$$\underbrace{\forall M > 0} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(0, \delta) \quad \underbrace{\frac{1}{x^2} > M}.$$

এখানে তলায় ব্র্যাকেট করা অংশদুটো হল $\frac{1}{x^2} \to \infty$-র অবদান।

ঠিক একই কায়দা আমরা $\mathbb{C}$-এর বেলাতেও খাটাব। ধরো বলতে চাই $z \to 0$ হলে $\frac{1}{z^2} \to \infty$ হয়। সেটার মানে হল--

$$\underbrace{\forall M > 0} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in N(0, \delta) \quad \underbrace{\left|\frac{1}{z^2}\right| > M}.$$

$\mathbb{R}$-এর সঙ্গে পার্থক্যটা লক্ষ করো। মনে রেখো যে, দুটো complex সংখ্যার মধ্যে ছোটো বড়ো নির্ধারণ করা যায় না। সেই কারণে আমরা যখন $M > 0$ লিখেছি, তখন বুঝতে হবে যে এখানে আমরা $\mathbb{C}$ ব্যবহার করছি না, M একটা positive

real সংখ্যা। একেবারে শেষে গিয়ে লক্ষ করো $\frac{1}{z^2} > M$ লিখি নি, কারণ তার মানে হয় না (যেহেতু $\frac{1}{z^2}$ রয়েছে $\mathbb{C}$-এর মধ্যে)। আমরা লিখেছি $\left|\frac{1}{z^2}\right| > M$. ওই modulus-টা নেওয়ায় $>$-এর দু দিকেই এখন real সংখ্যা। সুতরাং $\frac{1}{z^2} \to \infty$ মানে আসলে দাঁড়ালো $\left|\frac{1}{z^2}\right| \to \infty$, যার সংজ্ঞা আমরা জানিই, কারণ $\left|\frac{1}{z^2}\right|$ তো $\mathbb{R}$-র মধ্যে আছে।
একইভাবে যদি বলি $z \to \infty$ হলে $e^{-z} \to 0$ হয়, সেখানেও $z \to \infty$-কে $|z| \to \infty$ বলে ভাবব--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \underbrace{\exists M > 0 \quad \forall z \text{ with } |z| > M} \quad e^{-z} \in N(0, \epsilon).$$

দেখলে, এখানেও আমরা $z \to \infty$ মানে আসলে ধরলাম $|z| \to \infty$.
এর সঙ্গে আমাদের দিগন্তরেখার গল্পটার মিল দেখতে পাচ্ছ? আমরা বললাম $z \to \infty$ মানে আসলে $|z| \to \infty$. এদিকে $|z|$ মানে হল z বিন্দুটা 0 থেকে কত দূরে। সুতরাং $|z| \to \infty$ মানে z বিন্দুটা 0 থেকে ক্রমশঃ দূরে সরে যাচ্ছে। কোন্ দিকে সরছে, সে বিষয়ে কিন্তু $|z|$ সম্পূর্ণ নীরব, উত্তর দক্ষিণ পূর্ব পশ্চিম, ঈশান, নৈঋত যে কোনো দিকেই যাক, খালি যেন বহু বহু দূরে যেতে থাকে, অর্থাৎ দিগন্তরেখার যেকোনো বিন্দুর দিকে এগোলেই আমরা $z \to \infty$ বলব। তাই পুরো দিগন্তরেখাটাই হল ∞.

Example 11: প্রমাণ করো $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z-i} = 0$.

SOLUTION:

To show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall z$ with $|z| > M \quad \left|\frac{1}{z-i} - 0\right| < \epsilon.$

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এইবার একটু মাথা চুলকে ভেবে M বার করতে হবে। এরকম ক্ষেত্রে রাফ্ করে নিলে সুবিধা হয়। আমাদের কাজ হল $\left|\frac{1}{z-i}\right|$-কে ছোটো করা। বুঝতেই পারছ, z যতই দূরে যাবে, ওর সঙ্গে i-এর দূরত্বও ততই বাড়বে। সেটাকে অংকের ভাষায় লেখার জন্য triangle inequality কাজে লাগবে,

$$|z - i| \geq |z| - |i| = |z| - 1 > M - 1.$$

তাই $\left|\frac{1}{z-i}\right| < \frac{1}{M-1}$ হবে। সুতরাং M এমনভাবে নিলেই চলবে যাতে $\frac{1}{M-1} = \epsilon$ হয়।

$\boxed{\exists M}$ Choose $M = \frac{1}{\epsilon} + 1$.

$\boxed{\forall z}$ Take any z with $|z| > M$.

এবার খালি রাফ্টাকে গুছিয়ে লিখে দেওয়ার অপেক্ষা--

Then, by triangle inequality,

$$\left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|z-i|} \leq \frac{1}{|z| - |i|} < \frac{1}{M-1} = \epsilon,$$

as required.

■

এবার তাহলে $\mathbb{C}$-এর বেলাতেও ∞ নিয়ে কী করে কাজ করতে হয় বোঝা গেল। $\mathbb{C}$ আর এই ∞, এদেরকে এক সঙ্গে বলে **extended complex plane.** এর সংজ্ঞাই চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 12: Define extended complex plane $\mathbb{C}_\infty$.[1] **(2006.13ai)**

SOLUTION:

> **DEFINITION: Extended complex plane**
>
> By the <u>extended complex plane</u> we understand $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, where $\infty \notin \mathbb{C}$ is called the ``point at infinity".
> We interpret "$z \to \infty$" as "$|z| \to \infty$" in the real sense.

■

এই ধারণাটাকে কাজে লাগিয়ে কয়েকটা অংক করব, যাতে $\mathbb{R}$-এর ∞ আর $\mathbb{C}$-এর ∞-র পার্থক্যটা বুঝতে পারবে।

Example 13: Real analysis-এর বেলায় $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ হল undefined. কিন্তু $\mathbb{C}$-এর বেলায় $\lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = \infty$. কেন বলো তো!

SOLUTION: Real analysis-এর বেলায় $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}$ হল ∞ আর $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}$ হল $-\infty$. তাই $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$-টা exist করে না, undefined হয়ে যায়।

কিন্তু $\mathbb{C}$-এর বেলায় তো আর ∞ আর $-\infty$ বলে আলাদা কিছু নেই, যেদিকেই যাক পুরো দিগন্তরেখা জুড়েই একই ∞. অংকের ভাষায়, দেখাতে চাইছি--

◎ $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in N(0,\delta) \quad \left|\frac{1}{z}\right| > M.$

$\forall M$ Take any $M \in \mathbb{R}$.

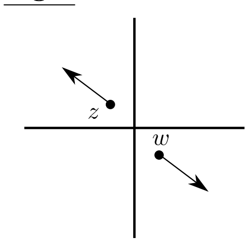
$\exists \delta$ Choose $\delta = \frac{1}{M} > 0$.

$\forall z$ Take any $z \in N(0,\delta)$.

Then

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > \frac{1}{\delta} = M,$$

<u>Fig 9</u>



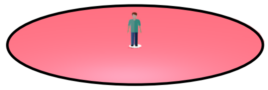


Fig 10

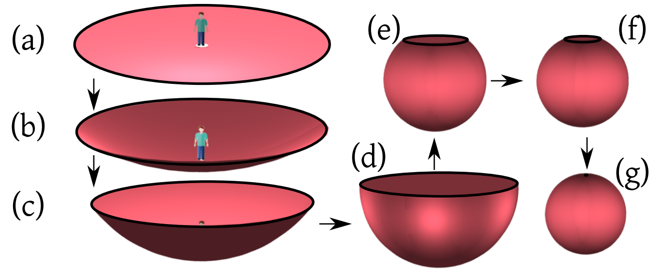


Fig 11

as required.

■

Exercise 6: Real analysis-এ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ হত। Complex analysis-এও কি $\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$ হয়? ■

Complex সংখ্যাদের বেলায় ∞ কাকে বলে সেটা বোঝা গেল বটে, কিন্তু একটা খুঁতখুঁতুনি থেকেই যায়। $\mathbb{R}$-এর বেলায় আমরা ∞-কে বেশ "$\mathbb{R}$-এর ডান প্রান্তে" একটা বিন্দু বলে ভাবতে পারতাম (সেই যেখানে রেল লাইন দুটো মিলিত হয়)। সুতরাং $x\to\infty$ বললেই আমরা বেশ ভাবতাম যেন x সেই বিন্দুটার দিকে এগোচ্ছে। কিন্তু $\mathbb{C}$-এর বেলায় ∞-টা ছাই একটা বিন্দু না হয়ে পুরো দিগন্তরেখাটা হয়ে গেল। ব্যাপারটা কেমন হাস্যকর ভাবো--ধরো z আর w হল $\mathbb{C}$-এর উপর দুটো পিঁপড়ে, দুজনে Fig 9-এর মত পরস্পরের উল্টো দিকে হাঁটা লাগলো, একেবারে কক্ষণো থামবে না বলে। তাও কিনা আমাদের বলতে হবে যে, দুজনেই একই ∞-র দিকে যাচ্ছে! এ তো পুরো হিন্দু-মুসলমান কেস, দুজনেই পরম ধার্মিক, ঈশ্বরের কাছে পৌঁছবার জন্য বেজায় ব্যাকুল, অথচ দুজনের মধ্যে লাঠালাঠি।

ব্যাপারটা অবশ্যই অস্বস্তিকর। ∞ বলতে যদি একটা কোনো বিন্দুকে কল্পনা করা যেত তবেই যেন ভালো[1] হত। জার্মান গণিতজ্ঞ Riemann (রীমান) সেই স্বপ্ন সফল করেছেন। তাঁর কায়দাটা ছবি দিয়ে বুঝতে বেশী সহজ। মনে করো $\mathbb{C}$ একটা তেপান্তরের মাঠ, তার মধ্যিখানে তুমি দাঁড়িয়ে আছো। মাঠটা যতই অসীম হোক, তোমার চোখে মনে হবে যেন দিগন্তরেখায় গিয়ে ওটা আকাশে মিলিত হয়ে শেষ হয়েছে। অর্থাৎ তোমার চোখে ওটা ঠেকবে যেন Fig 10-এর মত একটা মস্ত বড় গোলাকার চাকতি, যার পরিধিটা (মানে দিগন্তরেখা বা ∞-টা) হল গিয়ে ∞. এবার Riemann কল্পনা করলেন যেন এই চাকতিটা বাটির মত বেঁকে উঠে তোমাকে গ্রাস করছে। একটা ফুল যদি গুটিয়ে আবার কুঁড়ি হয়ে যেতে যায়, তবে যেমন হবে, কতকটা সেরকম আর কি! Fig 11-এর (a) থেকে (g) পর্যন্ত দেখলে একটা অ্যানিমেশনের মত ধারণা পাবে। লক্ষ করো কীভাবে পরিধিটা (মানে ∞-টা) ক্রমশঃ গুটিয়ে ছোটো হয়ে আসছে। শেষমেশ (g)-তে এসে পুরো মাঠটা একটা sphere-এ পরিণত হয়েছে, যার একেবারে উত্তর মেরুতে একটা বিন্দু খালি ফুটো। পুরো পরিধিটা গুটিয়ে ওই একটা ফুটোতে পরিণত হয়েছে! Riemann বললেন-- যদি এই sphere-টাকে $\mathbb{C}$ বলে ভাবি তবে ওই ফুটো বিন্দুটা, মানে উত্তর মেরুটাই হল ∞. সুতরাং ∞-কে একটা বিন্দু বলে কল্পনা করার যে শখটা ছিল, সেটা এবার পূর্ণ হল। Wessel বলেছিলেন, $\mathbb{C}$-কে একটা মাঠের মত ভাবলে যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ ইত্যাদিকে সহজে কল্পনা করতে সুবিধা। Riemann বললেন, $\mathbb{C}$-কে এভাবে একটা sphere হিসেবে ভাবলে ∞-কে কল্পনা করা বেশী সহজ। এই sphere-টাকে বলা হয় **Riemann sphere**.

Riemann-এর পরামর্শ মত চললে ∞ আর চতুর্দিকে ছড়িয়ে থাকে না, মাথার উপরে আকাশের গায় একটা বিন্দুতে পরিণত হয়। ঈশ্বরের ব্যাপারটাও অনেকটা সেইরকমই মনে হয়। লোকে যতই বলুক ঈশ্বর চতুর্দিকেই আছেন, কিন্তু ঈশ্বরের কাছে প্রার্থনা জানাবার সময়ে কেউই সাধারণতঃ দিগন্তরেখার দিকে তাকায় না, আকাশের দিকেই তাকায়। এবং এ বিষয়ে সব ধর্মের মানুষের মধ্যেই বেশ আশ্চর্য মিল দেখা যায়!

যাই হোক, Riemann sphere-এর ধারণাটা যেভাবে ছবি দিয়ে বললাম, তাতে দুটো ব্যাপার এখনও স্পষ্ট হয়নি--

[1] ঠিক যেমন সকলেই যদি ঈশ্বরটিশ্বর বলতে একইরকম জিনিস বুঝত, তবে "যত মত তত পথ" ইত্যাদি বাণীরও দরকার হত না, দুনিয়ায় রক্তপাতের পরিমাণও অনেক কমত।

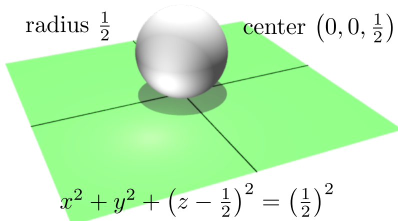


Fig 12

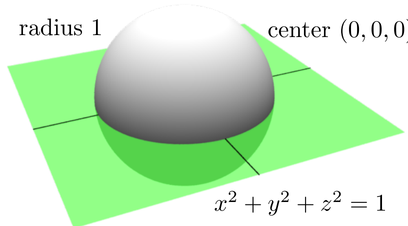


Fig 13

- এক, আমরা তো শুরু করেছিলাম Fig 10-এর মত একটা গোলাকার চাকতি নিয়ে, যার পরিধিটা সংকুচিত হতে হতে ∞ বিন্দুটার জন্ম হল। কিন্তু $\mathbb{C}$ তো আসলে একটা গোল চাকতি নয়, সেটা তো সব দিকেই অসীম। তার আবার পরিধি কোথায়?
- Wessel-এর কায়দায় যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ সহজে করা যেত, Riemann-এর কায়দায় সেগুলো আবার ঘেঁটে গেল না তো? ∞ যতই দরকারী ধারণা হোক, যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগের চেয়ে বেশী দরকারী তো নয়!

এই দুয়েরই উত্তর একই পথে হবে। Wessel-এর ধারণার সঙ্গে Riemann-এর ধারণার একটা যোগসূত্র স্থাপন করে। Wessel-এর ধারণা অনুযায়ী প্রতিটা complex সংখ্যা সমতলের উপর একেকটা বিন্দু (x, y), যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. আর Riemann-এর ধারণা অনুযায়ী প্রতিটা complex সংখ্যা sphere-এর গায় একেকটা বিন্দু। Sphere-টা যেহেতু কল্পনার জিনিস, তাই ওর অবস্থান এবং সাইজটা আমরা সুবিধা মত নিতে পারি। ধরো ওর diameter নিলাম 1 আর একটা ফুটবলের মত origin-এর উপর বসালাম (Fig 12)। তাহলে ওর radius হবে $\frac{1}{2}$ আর centre হবে $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. সুতরাং প্রতিটা complex সংখ্যা হবে এই sphere-এর গায় একেকটা বিন্দু (ζ, η, ρ), যেখানে $\zeta, \eta, \rho \in \mathbb{R}$ এবং তারা sphere-এর equation-টা মেনে চলে--

$$(\zeta - 0)^2 + (\eta - 0)^2 + \left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

এই প্রসঙ্গে বলে রাখি যে, কেউ কেউ ফুটবলটাকে Fig 13-এর মত বসাতে ভালোবাসেন। আমরা অবশ্য এ বইতে এভাবে বসাব না। তবে আমরা যা যা করব, একইরকম জিনিস Fig 13-এর বলটাকে নিয়েও করা যাবে।
Wessel আর Riemann-এর ধারণার মধ্যে যোগসূত্র স্থাপন করা মানে হল এমন একটা function বার করা যাতে (x, y) থেকে (ζ, η, ρ) বার করা যায়। এই function-টা one-one হতে হবে, যাতে (ζ, η, ρ) থেকে আবার (x, y)-তে ফেরা যায়। এরকম বহু function সম্ভব, তাদের একটাকে বলে **stereographic projection**. এবার সেটাই শিখব।

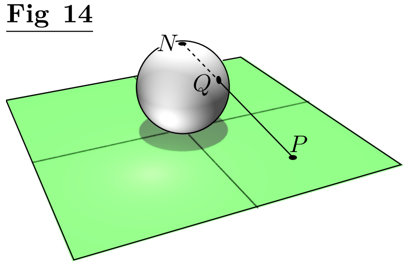
9.2 Plane থেকে sphere-এ

Example 14: If (ζ, η, ρ) is the stereographic projection of a complex number w on the Riemann

sphere

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + (z - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\},$$

Fig 14



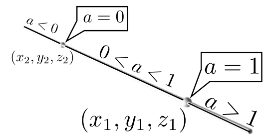


Fig 15

then prove that

$$\zeta = \frac{w+\bar{w}}{2(1+|w|^2)}, \quad \eta = \frac{-i(w-\bar{w})}{2(1+|w|^2)}, \quad \rho = \frac{|w|^2}{1+|w|^2}.$$

Hence find the stereographic projection of $(0,1)$ on S.[5] **(2009.12a)**

SOLUTION:

> Let P denote w in the complex plane. The Riemann sphere is a sphere with diameter 1 placed with its south pole at the origin (Fig 14).

Sphere-টার একেবারে নীচের বিন্দুটা (যেটা origin-কে ছুঁয়ে রয়েছে) সেটাকে বলব দক্ষিণ মেরু--south pole, আর সবচেয়ে উপরের বিন্দুটা (যেটা origin-এর ঠিক 1 একক উপরে আছে) সেটাকে বলব north pole (ছবিতে N)।
এইবার আমরা complex plane-টাকে sphere-টার গায় জড়াতে শুরু করব। জড়ানো মানে হল complex plane-টার প্রতিটি বিন্দুকে Riemann sphere-এর গায় একটা বিন্দুতে এনে ফেলা।
প্রথমে N থেকে P একটা straight line টানি। ছবিতে দেখতেই পাচ্ছো যে এই লাইনটা খানিকক্ষণ Riemann sphere-এর পেটের ভিতরে কাটিয়ে তার পর একসময়ে Q বিন্দু দিয়ে sphere-টার পেট ফুঁড়ে বেরিয়ে এসেছে। এই Q-টাই হল P-এর জন্য নির্বাচিত আমাদের সেই বিশেষ বিন্দু, যার গাল-ভরা নাম হল P-এর stereographic projection.

> We join the north pole N with P. Let NP intersect the sphere at Q.
> Then Q is called the stereographic projection of P.

এখানে P হল আসলে একটা complex সংখ্যা w. যদি $w = x+iy$ নিই (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$), তবে P-এর coordinates হবে $(x, y, 0)$. এখানে শেষের শূন্যটা এল কারণ আমরা complex plane-টাকে xy-plane বলে কল্পনা করছি, তাই $z=0$ হচ্ছে। আমাদের কাজ হল এ থেকে Q-এর coordinates, মানে (ζ, η, ρ) বার করা।

> Let $w = x+iy$ where $x, y \in \mathbb{R}$.
> So P has coordinates $(x, y, 0)$.
> Since Q lies on the line NP, hence Q has coordinates
>
> $$a(x,y,0)+(1-a)(0,0,1) = (ax, ay, 1-a)$$
>
> for some $a \in \mathbb{R}$.

এখানে অল্প একটা 3D geometry লাগালাম, সেটা ঠাণ্ডা মাথায় বুঝে নাও। যদি দুটো বিন্দু থাকে (x_1, y_1, z_1) আর (x_2, y_2, z_2), তবে তাদের যোগ করলে যে সরলরেখাটা পাবে তার উপর যেকোনো বিন্দুই দেখতে হয় এইরকম--

$$a(x_1, y_1, z_1) + (1-a)(x_2, y_2, z_2),$$

যেখানে $a \in \mathbb{R}$. বোঝার জন্য Fig 15 দ্যাখো। যেমন $a = \frac{1}{2}$ বসালে পাবে ওদের ঠিক মধ্য বিন্দুটা। যদি $a = \frac{1}{3}$ নাও, তবে বিন্দুটা (x_2, y_2, z_2)-এর কাছে সরে আসবে। যদি $a = 0$ তবে তো (x_2, y_2, z_2)-ই পাবে। যদি $a < 0$ হয়, তবে (x_2, y_2, z_2) ছাড়িয়ে চলে যাবে। একইভাবে যদি $a = 1$ হয়, তবে পাবে (x_1, y_1, z_1), এবং $a > 1$ হলে (x_1, y_1, z_1) ছাড়িয়ে চলে যাবে।

> Also, Q lies on the sphere. So
>
> $$(ax)^2 + (ay)^2 + \left(1 - a - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
>
> or,
>
> $$a^2x^2 + a^2y^2 + a^2 - a = 0.$$
>
> Hence, either $a = 0$ or $a = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.
>
> So
>
> $$\zeta = \frac{x}{1+x^2+y^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}, \quad \rho = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

প্রশ্নটায় অবশ্য x, y-এর উল্লেখ ছিল না। তাই এবার আমরা x, y-কে w দিয়ে লিখব। মনে রেখো যে, $w = x + iy$ এবং $\bar{w} = x - iy$. সুতরাং--

> We have
>
> $$x = \frac{w + \bar{w}}{2} \text{ and } y = \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{-i(w - \bar{w})}{2}.$$
>
> Also $x^2 + y^2 = |w|^2$. Hence
>
> $$\zeta = \frac{w + \bar{w}}{2(1+|w|^2)}, \quad \eta = \frac{-i(w - \bar{w})}{2(1+|w|^2)}, \quad \rho = \frac{|w|^2}{1+|w|^2},$$
>
> as required.

অংকটার দ্বিতীয় অংশ সহজ--খালি এই stereographic projection-এর ফর্মুলাটা একটা বিশেষ complex number-এর বেলায় লাগাতে হবে।

> The stereographic projection of $w = (0, 1) \equiv i$ is (ζ, η, ρ) where
>
> $$\begin{aligned} \zeta &= \frac{w + \bar{w}}{2(1+|w|^2)} = 0 \\ \eta &= \frac{-i(w - \bar{w})}{2(1+|w|^2)} = \frac{1}{2}, \\ \rho &= \frac{|w|^2}{1+|w|^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

Exercise 7: Find the point $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ on the Riemann sphere $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ that corresponds to the complex number $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ under stereographic projection.[5] **(2014.6a)**

HINT: আগের অংকটাই। ■

Example 15: If (ξ, η, ζ) is the stereographic projection corresponding to $z = x + iy$, then find ξ, η, ζ in terms of x, y.[2] **(2016.6a)**
SOLUTION: ■

Example 16: Define Riemann sphere and stereographic projection corresponding to a complex number $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. [2]
(2016, 2015, 2012, 2010)
SOLUTION:

> Riemann sphere is a way to represent the extended complex plane, $\mathbb{C}_\infty$, as a sphere. Usually it is taken to be a sphere with radius $\frac{1}{2}$ centred at $(0, 0, \frac{1}{2})$. The xy-plane is considered as the complex plane, with its origin $0 + 0i$ at $(0, 0, 0)$.
>
> Given any point z on the complex plane we can map it to a point on the sphere using stereographic projection as follows. We join the north pole of the Riemann sphere to z with a straight line. The point on the sphere where the line intersects the sphere is called the stereographic projection of z. Mathematically, the point $x + iy$ (where $x, y \in \mathbb{R}$) is mapped to
>
> $$(X, Y, Z) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(x, y, x^2 + y^2).$$
>
> This gives a bijection between $\mathbb{C}$ and the Riemann sphere (except the north pole). The north pole is considered as the ∞ of the extended complex plane.

■

Exercise 8: How do you represent $\mathbb{C}_\infty$ geometrically on a sphere?[3] **(2006.13ai)**
HINT: প্রশ্নের ভাষাটা অন্যরকম হলেও আগের অংকের উত্তরটা হুবহু তুলে বসিয়ে দিলেই হবে। ■

Example 17: For the point $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ in the complex plane $\mathbb{C}$, find the corresponding image point on the Riemann sphere S.[3] **(2007.13a)**
SOLUTION:

> We know that the stereographic projection of a point $z = x + iy \in \mathbb{C}$ where $x, y \in \mathbb{R}$ is
>
> $$\left(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right).$$

Here $z = x + iy = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

So

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |z|^2 = x^2 + y^2 = 1.$$

So the required stereographic projection is

$$\left(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2}\right).$$

■

Exercise 9: For the point $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ in the complex plane $\mathbb{C}$, find the corresponding image point on the Riemann sphere

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

[3] **(2012)** ■

Exercise 10: For the point $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ in the complex plane $\mathbb{C}$, find the corresponding image point on the Riemann sphere

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

[2] **(2017.6ai)** ■

Exercise 11: For the point $3 + 2\sqrt{-1}$ in the complex plane $\mathbb{C}$, find the corresponding image point on the Riemann sphere S.[3] **(2008.13a)**

■

9.3 Sphere থেকে plane-এ

আমরা এতক্ষণ দেখলাম কী করে complex plane থেকে stereographic projection করে আমরা Riemann sphere-এ পৌঁছতে পারি। এবার দেখব উল্টো দিকটা, মানে Riemann sphere থেকে complex plane-এ যাওয়া।

Example 18: If z is a point on the complex plane and (ξ, η, ζ) is its stereographic projection on the Riemann sphere

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

then prove that $z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$, $(i = \sqrt{-1})$. [5] **(2013.6a)**

SOLUTION:

The north pole (N) of the Riemann sphere is at $(0, 0, 1)$.

Let P denote the point z on the complex plane.

So P has coordinates $(x, y, 0)$ if $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

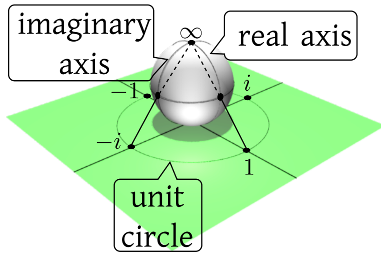


Fig 16

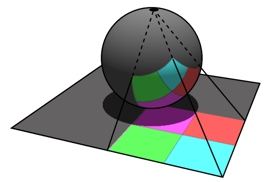


Fig 17

> Now P lies on the line joining N with $Q : (\xi, \eta, \zeta)$ so P must be of the form
> $$a(\xi, \eta, \zeta) + (1 - a)(0, 0, 1) = (a\xi, a\eta, a\zeta + 1 - a)$$
> for some $a \in \mathbb{R}$.

এই ব্যাপারটা আমরা একটু আগেও ব্যবহার করেছিলাম। যদি ভুলে গিয়ে থাকো তবে একটু পিছিয়ে গিয়ে Fig 15 দেখে নাও।

> Since P lies on the complex plane (ie, the xy-plane), hence $a\zeta + 1 - a = 0$.

এটা হল কারণ কোনো বিন্দু (x, y, z) তখনই xy-plane-এ থাকে যখন $z = 0$ হয়।

> So $a = \frac{1}{1-\zeta}$. Here $\zeta \neq 1$, since $Q \neq N$.
> So P is
> $$(a\xi, a\eta, 0) = \left(\frac{\xi}{1-\zeta}, \frac{\eta}{1-\zeta}, 0\right).$$
> So $z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$, as required.

■

9.4 কে কোথায় গেল

Complex plane-টা আমাদের মোটামুটি পরিচিত জিনিস। বেশ গ্রাফ কাগজের মত। সেখানে real axis বা imaginary axis কোথায় আছে, সেটা চোখ বুঁজেই দিব্যি বলে দিতে পারি। কিংবা 1, -1, i বা $-i$, এইরকম বহুলব্যবহৃত সংখ্যাগুলোকেও চট্ করে আঙুল দিয়ে দেখিয়ে দিতে পারি। কিন্তু stereographic projection করার পর সেই পরিচিত বন্ধুরা Riemann sphere-এর উপর কে যে কোথায় ছিট্‌কে পড়ে সেটা প্রথম প্রথম গুলিয়ে যায়। তাদের হদিশ দেখিয়েছি Fig 16-এ। ধীরে ধীরে ছবিটা হজম করা যাক। Riemann sphere নিয়ে কাজ করার জন্য এই ছবিটার সঙ্গে পরিচয় অপরিহার্য। খুব ভালো হয়, যদি নীচের বর্ণনাটুকু পড়ার সময়ে হাতের কাছে একটা বল থাকে। সেই বলটায় কোথাও একটা বিন্দু এঁকে সেটাকে north pole বলো, আর তার ঠিক উল্টোদিকে একটা south pole এঁকে নাও। এবার সেই south pole-কে টেবিলের সঙ্গে লাগিয়ে বলটাকে টেবিলের উপর বসাও। এখানে টেবিলটা হল complex plane. এবার যেমন যেমন বলছি সেভাবে বলটার গায় বিভিন্ন দাগ দিতে দিতে পড়ো।

- যদি origin-কে centre করে একটা unit circle আঁকো, (মানে এমন circle যার radius হল 1), তবে সেটা complex plane-এর উপরে কেমন দেখতে হবে সে তো জানোই। সেইটা stereographic projection-এর ফলে পরিণত হবে Riemann sphere-টার equator-এ (মানে নিরক্ষরেখায়)।

- এই unit circle-টার উপরে রয়েছে $\mathbb{C}$-এর চার জন অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সদস্য, $1, i, -1$ এবং $-i$. এরা সমান সমান অন্তরে অন্তরে রয়েছে, 1-এর মুখোমুখি -1, আর $-i$ রয়েছে i-এর মুখোমুখি। Riemann sphere-এর উপরেও এদের অবস্থান একইরকম, খালি এখন এরা রয়েছে equator-এর উপরে।

- Unit circle-টার centre-এ রয়েছে origin-টা। সেটা হল Riemann sphere-এর south pole (দক্ষিণ মেরু)। এর মুখোমুখি আছে north pole-টা, যেটা $\mathbb{C}_\infty$-র ∞.

- এবার বলি real axis-টা Riemann sphere-এর উপরে কোথায় গিয়ে পড়ে। এটা পরিণত হয় একটা circle-এ, যেটা vertical-ভাবে Riemann sphere-টাকে ঘিরে আছে। লক্ষ করো এই circle-টা north pole (মানে ∞) দিয়ে যায়। তার কারণ হল real axis-টা অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। অবশ্য ∞ মোটেই $\mathbb{C}$-এর মধ্যে নেই, তাই খুব আইন বাঁচিয়ে বলতে হলে বলা ভালো যে, Riemann sphere-এর উপরে real axis-টা হল ওই vertical circle-টা থেকে north pole-টা বাদ দিলে যে অংশটা থাকে, সেটা।

- একইভাবে imaginary axis-টা হল আরেকটা vertical circle (এবং এক্ষেত্রেও north pole-টা বাদ দিতে হবে)।

Riemann sphere নিয়ে চিন্তা করা কল্পনাশক্তির ভালো ব্যয়াম। সেই ভেবেই নীচের অংক কয়টা দিলাম। এখানে stereographic projection-এর ফর্মুলা দিয়ে অংক কষতে বলছি না। মনে মনে Riemann sphere-টাকে একটা বলের মত কল্পনা করে উত্তর দিতে হবে।

Exercise 12: Complex plane-এ $x = y$ লাইনটা stereographic projection করার পর Riemann sphere-এর উপর কীরকম দেখাবে? ■

Exercise 13: Complex plane-এর উপর $x = 1$ আর $x = 2$ লাইনদুটো পরস্পরের সঙ্গে parallel. এদের stereographic projection-ও কী parallel হবে? ■

Exercise 14: Stereographic projection-এর ফলে complex plane-এর কোন্ অঞ্চল Riemann sphere-এর দক্ষিণ গোলার্ধে পরিণত হয়? ■

DAY 10
Riemann sphere (part 2)

10.1 জ্যামিতি

যদি complex plane-এর উপরে কোনো ছবি আঁকো, তবে তার stereographic projection হবে Riemann sphere-এর উপর একটা ছবি (Fig 17)। এই দুটো ছবির মধ্যে কিছু সাদৃশ্য থাকবেই, কিন্তু সামান্য বিকৃতিও ঢুকে যাবে। হাজার হোক

Fig 18

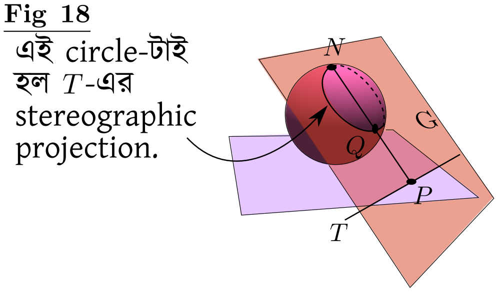


Fig 19

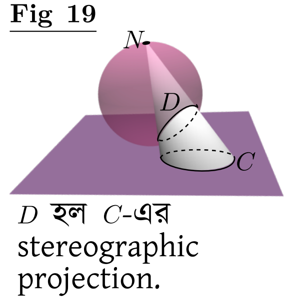
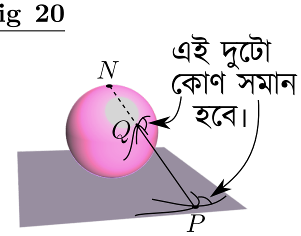


Fig 20



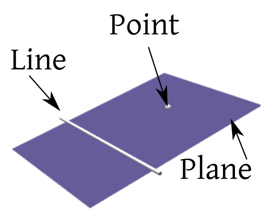


Fig 21

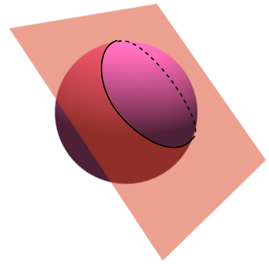


Fig 22

একটা হল চ্যাপটা সমতল, আর অন্যটা হল গোলাকার। ঠিক যেমন ভূগোলের বইয়ের পাতার ম্যাপ আর গ্লোবের উপর আঁকা ম্যাপ। দুটো ছবির মধ্যে কোথায় কোথায় সাদৃশ্য সেটা নিয়ে লোকে বিস্তর মাথা ঘামিয়েছে। এদের মধ্যে তিনটে সাদৃশ্য বিশেষভাবে চোখে পড়ার মত--

- যদি complex plane-এর উপর একটা লাইন টানো (Fig 18), তবে তার stereographic projection হবে প্রায় একটা circle. "প্রায়" বললাম কারণ circle-টার উপরে একটা বিন্দু খালি বাদ থাকবে, north pole-টা।
- যদি complex plane-র উপর একটা circle আঁকো, তবে তার stereographic projection-টাও একটা circle-ই হবে। ব্যাপারটা এইভাবে ভাবতে পারো--complex plane-টা যেন একটা মঞ্চ (Fig 19), তার উপর একটা স্পটলাইট এসে পড়ছে Riemann sphere-এর north pole থেকে। স্পটলাইটটা যদি একটা circle হয়, তবে আলোর রশ্মিগুলো যেখানে Riemann sphere-টা ফুঁড়ে বেরোচ্ছে, সেই জায়গাটাও একটা circle হতে বাধ্য।
- যদি complex plane-র উপর যে কোনো দুটো curve আঁকো যারা পরস্পরকে ছেদ করে, তবে তাদের stereographic projection দুটোও পরস্পরকে ছেদ করবে (Fig 20)। এটুকু বলাই বাহুল্য। আশ্চর্য ব্যাপার হল ছেদ করার সময়ে curve-দুটোর মধ্যে যে কোণটা তৈরী হবে, সেই কোণটা কিন্তু stereographic projection করার পরেও একই থাকবে!

10.1.1 Line to circle

Example 19: If $T \subset \mathbb{C}$ is a line, show that the image of the line T under the stereographic projection is a circle minus north pole in the Riemann sphere.[3] **(2015.6a)**

SOLUTION: এই অংকটা দেখলে প্রথমেই যে কায়দাটার কথা মনে হয়, সেটা হল এইরকম--প্রথমে একটা সরলরেখার equation নিয়ে শুরু করব, তারপর তাতে stereographic projection-এর ফর্মুলা লাগাব, এবং দেখাব যে শেষমেশ জিনিসটা একটা circle-এর equation মত কিছু একটা হয়। সেভাবে করা যাবে না এমন নয়, কিন্তু বিচ্ছিরি বিচ্ছিরি সব জিনিস এসে যাবে। আমরা তাই সামান্য ঘুরপথে এগোব। তার জন্য আমাদের কাজে লাগবে এই তথ্য কয়টা--

> We know that
>
> - given a straight line in $\mathbb{R}^3$ and a point in $\mathbb{R}^3$ not on the line, there is a unique plane passing through them.

বোঝার জন্য Fig 21 দেখে নাও।

> - if the intersection of a sphere and a plane contains at least two points, then the intersection must be a circle.

Fig 22 দেখে নাও। এখানে "at least two points" বলার দরকার হল, কারণ এমন হতেই পারে যে plane-টা sphere-টার গায় লাগলই না, কিংবা আলতো করে খালি একটা বিন্দুতে স্পর্শ করল। এই দুটো কেসকে বাদ দেওয়ার জন্যই "at least two points"-এর শর্তটা প্রয়োজন।

> Here $T \subset \mathbb{C}$ is a line, and the north pole, N, of the Riemann sphere is a point not on T. Let G be the unique plane through them.
>
> Let P be any point on T. Let its stereographic projection be Q.
>
> Now P and N are lying on G. Also, Q lies on the line PN.
>
> So Q must lie on G.

তার মানে Q-টা G-র উপরেও আছে, আবার Riemann sphere-টার উপরেও আছে, অর্থাৎ--

> Thus, Q must lie on the intersection of the Riemann sphere and G.

এবার দেখাব যে, এই intersection-টা একটা circle. তার জন্য দেখাতে হবে যে, এর মধ্যে অন্ততঃ দুটো point আছে।

> Since stereographic projection is one-one, and T at least two distinct points, so the intersection also has at least two distinct points.
> Thus, the intersection is a circle on the Riemann sphere.

এবার উল্টো দিকটা দেখাব, মানে দেখাব--এই circle-এর উপর N বাদে যেকোনো point-ই T-এর কোনো না কোনো point-এর stereographic projection.

> Conversely, let Q be any point on this circle other than N. Then NQ cannot be parallel to the complex plane (because N is the unique highest point on the sphere), and so must intersect $\mathbb{C}$ at some point P.
>
> N, Q are both on G. So P lies on G.
>
> Thus, P lies on the intersection of G and $\mathbb{C}$ which is T.
>
> Hence we have proved that the image of the line T under the stereographic projection is a circle minus the north pole in the Riemann sphere.

■

10.1.2 Circle to circle

এবার দেখাব যে, কোনো circle-এর stereographic projection আবার একটা circle-ই হয়।

Example 20: Prove that the stereographic projection of a circle is again a circle.[3] **(2010.12a)**

SOLUTION: আমরা শুরু করব complex plane-এর উপরে যেকোনো circle-এর equation নিয়ে--

> Let us take any circle in $\mathbb{C}$ with centre (a, b) and radius r, say. Its equation is
> $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

তার উপরে stereographic projection-এর ফর্মুলা লাগাব--

> Let the stereographic projection of (x,y) be (X,Y,Z). Then we know that
>
> $$X = \frac{x}{1+x^2+y^2},$$
> $$Y = \frac{y}{1+x^2+y^2},$$
> $$Z = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

এবার দাঁতে দাঁত চেপে লড়ে গেলে x,y-এর equation থেকে X,Y,Z-এর একটা equation বার করা যাবে, এবং দেখানো যাবে যে সেটাও একটা circle-এর equation. কিন্তু সেটা বড়ই চাপের হবে। আমরা কৌশল করে খাটনি বাঁচাব। কৌশলটা আগের অংকের মতই--

> We know that
>
> if the intersection of a sphere and a plane contains at least two points, then the intersection must be a circle.

সুতরাং আমরা খালি দেখাব যে, এমন একটা plane আছে যাতে circle-টার stereographic projection-এর প্রতিটা point-ই সেই plane-এর উপরে থাকে। ব্যস্, তাহলেই হবে। কারণ stereographic projection-টা Riemann sphere-এর উপরে তো ছিলই, এখন যদি একটা plane-এর উপরেও থাকে, তবে ওদের intersection-এও থাকতে বাধ্য! আর intersection-টা হল একটা circle.

> Shall find constants $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ (not all zero) such that $AX+BY+CZ=D$. This is the equation of a plane in $\mathbb{R}^3$.

একটা plane-এর equation বার করার সময়ে কোনো x^2,y^2 থাকলে মুশকিল। তাই ওগুলোকে তাড়াব--

> Since $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2=r^2$, hence $x^2+y^2=2ax+2by+r^2-a^2-b^2$. So
>
> $$(X,Y,Z)=\frac{(x,y,2ax+2by+r^2-a^2-b^2)}{2ax+2by+1+r^2-a^2-b^2}.$$
>
> So we need $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ (not all zero) such that
>
> $$Ax+By+C(2ax+2by+r^2-a^2-b^2)=D(2ax+2by+1+r^2-a^2-b^2).$$

এটা কী করে পেলাম বুঝলে তো? $AX+BY+CZ=D$ লিখে তলার $(2ax+2by+1+r^2-a^2-b^2)$-টাকে ডানদিকে নিয়ে এসেছি।

> or, equating coefficients of x,y and constant terms,
>
> $$A+2aC=2aD,\ \ B+2bC=2bD,\ \ C(r^2-a^2-b^2)=D(1+r^2-a^2-b^2).$$

> or
>
> $$A = 2a(D-C),\ \ B = 2b(D-C),\ \ C(r^2-a^2-b^2) = D(1+r^2-a^2-b^2).$$

লক্ষ করো, এখানে আমাদের চারটে unknown আছে A, B, C, D অথচ equation রয়েছে মোটে তিনটে। তাই আমরা A, B, C, D পুরো বার করে ফেলতে পারব না। কিন্তু এরকম একটা করে A, B, C, D পাওয়াই যথেষ্ট, এবং সে কাজটা চোখে দেখেই করে ফেলা যায়। যেমন শেষের equation হল এইরকম--

$C\times$ কিছু একটা $=$ $D\times$ কিছু একটা।

যদি বাঁদিকের "কিছু একটা"-টাকেই D নিই, আর ডানদিকের "কিছু একটা"-টাকে C নিই, তবেই equation-টা মিলে যাবে। তার পর A, B বার করতে কতক্ষণ?

> So we can take
>
> $$D = r^2-a^2-b^2,\ \ C = 1+r^2-a^2-b^2,\ \ A = -2a,\ \ B = -2b. \qquad (*)$$

এখানে ভাষার একটু প্যাঁচ আছে। আমরা বলেছি "we can take", কারণ এটা খালি একটা উত্তর, আরো নানা উত্তরও থাকতে পারে। আরো লক্ষ করো, আমরা এখানে কোথাও ভাগ ব্যবহার করি নি, যেমন $C = \frac{D(1+r^2-a^2-b^2)}{r^2-a^2-b^2}$ লিখি নি, কারণ তলার জিনিসটা শূন্য হয়ে গেলে মুশকিল হবে।

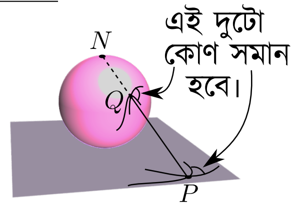
> Also we know that (X, Y, Z) lies on the Riemann sphere. Thus, (X, Y, Z) lies on the intersection of the sphere and the plane.

এবার দেখাতে হবে যে intersection-টা সত্যিই একটা circle. তার জন্য দেখাতে হবে যে ওর মধ্যে অন্ততঃ দুটো point আছে।

> Since stereographic projection is one-one, and the circle in the complex plane has at least two distinct points, so the intersection also has at least two distinct points.
>
> So the intersection is a circle.

এবার উল্টোদিকটায়--

Fig 23



> Conversely, let (X, Y, Z) lie on the intersection of the Riemann sphere and the plane
> $$AX + BY + CZ = D,$$
> where A, B, C, D are as in (*).

এবার যেভাবে (*) পেয়েছিলাম, ঠিক সেই পথেই উল্টোদিকে গেলেই--

> Rearranging, $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2$, which is indeed the equation of the circle with centre (a, b) and radius r, as required.

■

10.1.3 Angle বদলায় না

এবার আমরা দেখব যে, stereographic projection-এর ফলে angle বদলায় না। ছবি দিয়ে ভাবা যাক (Fig 23)। ছবিটা আমরা একটু আগেই দেখেছি। এখানে complex plane-এর উপরে দুটো curve রয়েছে, যারা দুজনেই একই বিন্দু P দিয়ে যায়। ওই বিন্দুতে ওদের মধ্যে একটা কোণ তৈরী হয়েছে। এই curve দুটোর দুজনের stereographic projection হল Riemann sphere-এর উপর দুটো curve. যদি P-এর stereographic projection হয় Q, তবে বুঝতেই পারছ যে এই curve দুটো Q দিয়ে যেতে বাধ্য, সুতরাং এদের মধ্যে Q-তে একটা কোণ তৈরী হবে। তার মানে তোমার কাছে এখন দুটো কোণ, একটা complex plane-এর উপরে, অন্যটা Riemann sphere-এর গায়। আশ্চর্যের কথা হল--এই দুটো কোণ সমান হতে বাধ্য! এমনটা কেন হয়, সেটাই এবার আমরা আলোচনা করব।
ছোটোবেলায় আমরা কোণ মাপতাম জ্যামিতি বাক্সের চাঁদা দিয়ে। বুঝতেই পারছ যে, এখানে সেটা সম্ভব নয়, কারণ curve-এর গায় চাঁদা বসাবে কী করে? এখানে কায়দাটা এইরকম--

> দুটো curve-এর মধ্যে কোণ বার করার জন্য আমরা প্রথমে curve দুটোর ছেদবিন্দুতে প্রতিটা curve-এর tangent বার করি, এবং সেই tangent দুটোর মধ্যে যে কোণটা হয় সেটাকেই curve দুটোর মধ্যেকার কোণ বলি।

একটা curve বলতেই যে জিনিসটা মনে আসে সেটা হল কাগজের পাতায় পেন চালিয়ে খানিকটা একটানা দাগ দেওয়া। পেনটা কীভাবে চলেছে তার বর্ণনাটা দিলেই অংকের ভাষায় curve-টাকে প্রকাশ করা হয়ে যাবে, অর্থাৎ বলে দিতে হবে প্রতিটা মুহূর্ত t-তে পেনটা কোণ বিন্দুতে ছিল। যদি curve-টা $\mathbb{C}$-এর উপরে আঁকা হয়, তবে প্রতিটা বিন্দু একেকটা complex সংখ্যা হবে, মানে প্রতিটা t-এর জন্য একটা করে complex সংখ্যা পাবে, যাকে $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ নাম দিলেই বুঝতে পারবে যে একটা curve মানে আসলে t-এর দুটো function, মানে $x(t)$ আর $y(t)$. এইভাবে $(x(t), y(t))$ হিসেবে একটা curve-কে প্রকাশ করাকে বলে তার **parametric form.** যেহেতু পেনটা একটানা চলেছে, তাই function দুটোই হবে continuous. আমাদের অংকগুলোতে $x(t)$ আর $y(t)$ দুজনেই differentiable-ও হবে, যাতে tangent আঁকতে কোনো সমস্যা না হয়। যদি curve-টা Riemann sphere-এর উপরে আঁকা হয়, তাহলেও একইরকম গল্প, খালি তখন প্রতিটা বিন্দু

Fig 24

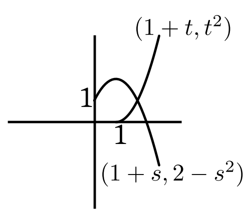
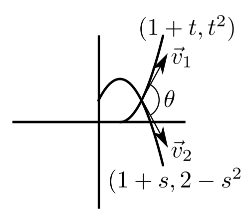


Fig 25



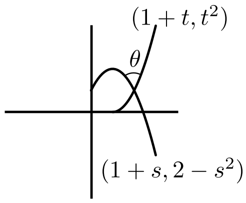


Fig 26

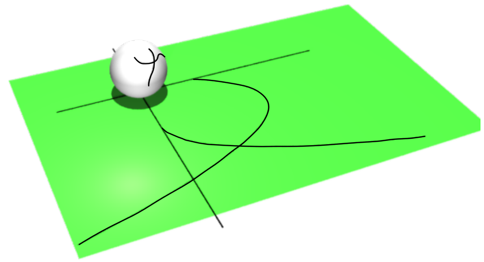


Fig 27

দেখতে হবে (X,Y,Z)-এর মত। তাই সেখানে function লাগবে তিনটে, $X(t), Y(t)$ আর $Z(t)$. আমাদের অংকগুলোতে এরাও differentiable হবে।
এবার একটা উদাহরণ দেখলেই curve-এর মধ্যে কোণ বার করার কায়দাটা রপ্ত হয়ে যাবে।

Example 21: একটা curve দিলাম $(1+t,t^2)$ যেখানে $t\in[0,2]$. আর অন্য curve-টা দিলাম $(1+s,2-s^2)$, যেখানে $s\in[-1,2]$. Fig 24 দ্যাখো। এরা কোথায় পরস্পরকে ছেদ করে বলো। তারপর সেখানে ওদের মধ্যে কোণটা বার করো।

Solution: ছেদবিন্দু বার করার জন্য আমরা এমন $t\in[0,2]$ এবং $s\in[-1,2]$ খুঁজব, যাতে $(1+t,t^2)=(1+s,2-s^2)$ হয়। অর্থাৎ $t=s$ এবং $t^2=2-s^2$ হয়। সুতরাং $t^2=1$, তাই $t=1$ (যেহেতু $t\in[0,2]$ বলা আছে)। এবার $(1+t,t^2)$-এর মধ্যে $t=1$ বসালেই ছেদ বিন্দু পেয়ে যাচ্ছি $(1+1,1^2)=(2,1)$.
এবার tangent দুটো বার করি। প্রথম curve-টা ছিল $(1+t,t^2)$, যাকে differentiate করলে হয় $(1,2t)$. সুতরাং $t=1$-এ tangent-টা হচ্ছে $\vec{v}_1=(1,2)$. ছবি দেখতে চাইলে Fig 25 দ্যাখো।
দ্বিতীয় curve-টার বেলায় differentiate করলে আসছে $(1,-2s)$. এখানে $s=1$ বসালে tangent পাচ্ছি $\vec{v}_2=(1,-2)$.
এবার $\vec{v}_1$ আর $\vec{v}_2$-র মধ্যেকার কোণ বার করলেই হবে। তার জন্য একটা ফর্মুলা আছে--কোণটা হবে $\theta\in[0,\pi]$, যেখানে

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2}{\sqrt{\vec{v}_1\bullet\vec{v}_1}\sqrt{\vec{v}_2\bullet\vec{v}_2}}.$$

এখানে '$\bullet$' মানে হল dot product যেমন $\vec{a}=(a_1,a_2)$ আর $\vec{b}=(b_1,b_2)$ হলে $\vec{a}\bullet\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ হবে।
এখানে

$$\begin{aligned}\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2 &= \cdots=-3,\\ \vec{v}_1\bullet\vec{v}_1 &= \cdots=5,\\ \vec{v}_2\bullet\vec{v}_2 &= \cdots=5.\end{aligned}$$

সুতরাং পেয়ে যাচ্ছি

$$\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=-\frac{3}{5}.$$

লক্ষ করো, এখানে আমরা θ-টা কীভাবে নিয়েছিলাম, Fig 26-এর মত করে নিই নি। সেটা আসলে ঠিক করে দিয়েছে tangent দুটোর অভিমুখ (মানে পেন চালানোর অভিমুখ)। ■

এবার দেখি curve দুটোর stereographic projection করার পর কোণটার কী দশা হয়।

Example 22: আগের অংকের curve দুটোকে stereographic projection করলে Riemann sphere-এর উপরে দুটো curve পাবে, যেমন দেখিয়েছি Fig 27-এ। ওদের মধ্যে কোণ বার করো।

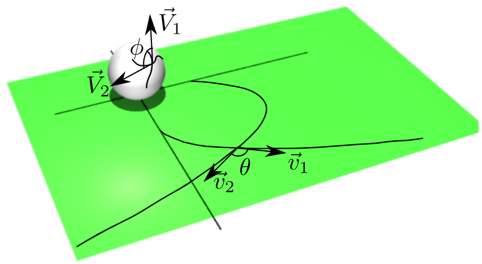


Fig 28

SOLUTION: নতুন curve দুটোর parametric form বার করার জন্য প্রথমে stereographic projection-এর ফর্মুলাটা লেখা যাক--

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{1+x^2+y^2}, \\ Y &= \frac{y}{1+x^2+y^2}, \\ Z &= \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

এখানে $x = 1+t$ আর $y = t^2$ বসালেই প্রথম curve-টার parametric form পেয়ে যাবে। একইভাবে $x = 1+s$ আর $y = 2-s^2$ বসালে পাবে দ্বিতীয়টার parametric form. এবার ওদেরকে differentiate করে tangent বার করে ফেলা যাবে। কিন্তু সেটা বেশ চাপের কাজ, অনেক বিচ্ছিরি বিচ্ছিরি দেখতে জিনিস এসে যাবে। তার চেয়ে একটু বুদ্ধি করে এগোলে অনেক সহজে কার্যোদ্ধার হবে। প্রথমেই $x = 1+t$ ইত্যাদি না বসিয়ে আগে stereographic projection-এর ফর্মুলাটাকে differentiate করে ফেলি--

$$\begin{aligned} X' &= \frac{x'(1-x^2+y^2)+y'(-2xy)}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ Y' &= \frac{y'(1-y^2+x^2)+x'(-2xy)}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ Z' &= \frac{2(xx'+yy')}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

মনে আছে নিশ্চয়ই যে, complex plane-এ curve দুটো পরস্পরকে ছেদ করেছিল $(2,1)$ বিন্দুতে। সুতরাং $x = 2$ আর $y = 1$ বসালে হবে

$$\begin{aligned} X' &= \frac{-2x'-4y'}{36}, \\ Y' &= \frac{4y'-4x'}{36}, \\ Z' &= \frac{2(2x'+y')}{36}. \end{aligned}$$

ছেদবিন্দুতে tangent দুটো ছিল $\vec{v}_1 = (1,2)$ এবং $\vec{v}_2 = (1,-2)$. সুতরাং যদি (x', y')-এর জায়গায় $\vec{v}_1 = (1,2)$ বসাই, তবে পাব প্রথম curve-টার stereographic projection-এর tangent--

$$\vec{V}_1 = (X_1', Y_1', Z_1') = \cdots = \tfrac{1}{36}(-10, 4, 8).$$

একইভাবে (x', y')-র জায়গায় $\vec{v}_2 = (1, -2)$ বসালে পাব

$$\vec{V}_2 = (X'_2, Y'_2, Z'_2) = \tfrac{1}{36}(6, -12, 0).$$

Fig 28 দেখলে সুবিধা হতে পারে। এই $\vec{V}_1$ আর $\vec{V}_2$-র মধ্যেকার কোণটাকে যদি $\phi \in [0, \pi]$ বলি, তবে

$$\cos\phi = \frac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\sqrt{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_1}\sqrt{\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_2}} = \cdots = -\frac{3}{5}.$$

দেখলে, আগের অংকে $\cos\theta$ যা এসেছিল, এখানে $\cos\phi$-ও তাই এল! যেহেতু $\theta, \phi \in [0, \pi]$-এর মধ্যে রয়েছে, তাই ওদের cos সমান হওয়া মানে আসলে $\phi = \theta$. ■

এই দুটো অংক ভালো করে পড়ে বুঝে নাও। ঠিক একইে কায়দায় নীচের theorem-টা প্রমাণ হবে।

THEOREM

Let c_1, c_2 be two curves in $\mathbb{C}$ intersecting at some point $p \in \mathbb{C}$. Let C_1, C_2 and P be the stereographic projections of c_1, c_2 and p, respectively. Let the angle between c_1, c_2 at p be $\theta \in [0, \pi]$. Let the angle between C_1, C_2 at P be $\phi \in [0, \pi]$. Then

$$\theta = \phi.$$

Proof: এখানে c_1 আর c_2-র কোনো parametric form দিয়ে দেয় নি, তাই আমরাই সেটা ধরে নেব।

> Let c_1, c_2 and p be given by $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(s), y_2(s))$ and (a, b), where $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(s)$, $y_2(s)$, a and b are all real.

দুটো curve-ই (a, b) দিয়ে যায়। অতএব--

> So $(x_1(t_0), y_1(t_0)) = (x_2(s_0), y_2(s_0)) = (a, b)$ for some t_0 and s_0.
> Let the stereographic projections be the curves $(X_i(t), Y_i(t), Z_i(t))$, where, for $i = 1, 2$,
>
> $$\begin{aligned} X_i &= \frac{x_i}{1 + x_i^2 + y_i^2}, \\ Y_i &= \frac{y_i}{1 + x_i^2 + y_i^2}, \\ Z_i &= \frac{x_i^2 + y_i^2}{1 + x_i^2 + y_i^2} = 1 - \frac{1}{1 + x_i^2 + y_i^2}. \end{aligned}$$

এবার আমরা আগের অংকের সমাধানের মতই differentiate করব--

Differentiating,

$$\begin{aligned} X_i' &= \frac{x_i'(1-x_i^2+y_i^2)+y_i'(-2x_iy_i)}{(1+x_i^2+y_i^2)^2}, \\ Y_i' &= \frac{y_i'(1-y_i^2+x^2)+x_i'(-2x_iy_i)}{(1+x_i^2+y_i^2)^2}, \\ Z_i' &= \frac{2(x_ix_i'+y_iy_i')}{(1+x_i^2+y_i^2)^2}. \end{aligned}$$

So the two tangents for c_1, c_2 at p are

$$\vec{v}_i = (x_i', y_i')$$

and the tangents for C_1, C_2 at P are

$$\vec{V}_i = (X_i', Y_i', Z_i') = \frac{1}{(1+a^2+b^2)^2}(x_i'(1-a^2+b^2)+y_i'(-2ab), y_i'(1-b^2+a^2)+x_i'(-2ab), 2(ax_i'+by_i')).$$

এটা আবার কোথা থেকে এল রে বাবা! আসলে এক্ষুণি যে X_i', Y_i' আর Z_i'-এর ফর্মুলাগুলো দিলাম ওগুলোকেই পাশাপাশি লিখেছি। আর x_i-এর জায়গায় a, এবং y_i-এর জায়গায় b লিখছি। ব্যস্, আর কিছুই করিনি।

Since $\theta, \phi \in [0, \pi]$, hence it is enough to show that $\cos\theta = \cos\phi$, ie,

$$\frac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\sqrt{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_1}\sqrt{\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_2}} = \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2}{\sqrt{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1}\sqrt{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2}}. \qquad (*)$$

দুপাশের মধ্যে RHS-টাকে বেশী সহজ লাগছে, তাই ওটাকে দিয়েই শুরু করি।

The RHS is

$$\frac{x_1'x_2' + y_1'y_2'}{\sqrt{(x_1')^2+(y_1')^2}\sqrt{(x_2')^2+(y_2')^2}}.$$

এর চেয়ে বেশী এগোবার আর পথ নেই, কারণ আমরা x_i' বা y_i'-এর কোনো ফর্মুলা জানি না। এবার তাহলে LHS-এর দিকে চোখ ফেরানো যাক। লক্ষ করো, RHS-এ কোনো a, b নেই। তার মানে LHS-এর a, b-গুলোও নির্ঘাত সব কাটাকাটি হয়ে যাবে। তার জন্য $\vec{V}_i$-দেরকে একটু সাজিয়ে লিখে নিলে সুবিধা হবে--

Now

$$\vec{V}_i = \frac{1}{M}(Ax_i' + By_i', Cx_i' + Dy_i', Ex_i' + Fy_i'),$$

where

$$\begin{aligned} A &= 1 - a^2 + b^2 \\ B &= C = -2ab \\ D &= 1 - b^2 + a^2 \\ E &= 2a \\ F &= 2b \\ M &= (1 + a^2 + b^2)^2. \end{aligned}$$

এবার লড়াই--

So

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 &= \frac{1}{M}\{(Ax_1' + By_1')(Ax_2' + By_2') \\ &\quad +(Cx_1' + Dy_1')(Cx_2' + Dy_2') \\ &\quad +(Ex_1' + Fy_1')(Ex_2' + Fy_2')\} \\ &= \frac{1}{M}\{x_1'x_2'(A^2 + C^2 + E^2) \\ &\quad +x_1'y_2'(AB + CD + EF) \\ &\quad +y_1'x_2'(AB + CD + EF) \\ &\quad +y_1'y_2'(B^2 + D^2 + F^2)\}. \end{aligned}$$

It is easy to see that

$$\begin{aligned} A^2 + C^2 + E^2 &= B^2 + D^2 + F^2 = (1 + a^2 + b^2)^2 \\ AB + CD + EF &= 0. \end{aligned}$$

So

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \frac{1}{M^2}(1 + a^2 + b^2)(x_1'x_2' + y_1'y_2').$$

Similarly,

$$\vec{V}_i \bullet \vec{V}_i = \frac{1}{M^2}(1 + a^2 + b^2)((x_i')^2 + (y_i')^2).$$

So the LHS of (*) is

$$\frac{x_1'x_2' + y_1'y_2'}{\sqrt{(x_1')^2 + (y_1')^2}\sqrt{(x_2')^2 + (y_2')^2}}.$$

Hence LHS $=$ RHS, as required.

[Q.E.D]

DAY 11
Möbius transform (part 1)

11.1 কী জিনিস?

এবার আমরা একটা নতুন ধরণের function-এর কথা শিখব, যার নাম **Möbius transform** (মোবিয়াস্ ট্রান্স্ফর্ম) কয়েকটা উদাহরণ দেখলেই এদের চেহারা চিনে যাবে--

$$\frac{2z-3}{3z+10},\quad \frac{\pi z+3-7i}{-\frac{z}{2}+3.4},\quad \text{ইত্যাদি}$$

মানে চেহারাটা হল $\frac{az+b}{cz+d}$ জাতীয়, যেখানে $a,b,c,d\in\mathbb{C}$. অবশ্য এর মধ্যে কয়েকটা বোকা-বোকা কেসও ঢুকে পড়ে, যেখানে z-টা কেটে গিয়ে স্রেফ একটা constant পড়ে থাকে, সেই কেসগুলোকে বাদ দেব। যেমন, a আর c যদি দুজনেই 0 হয়, তবে কোনো z-ই থাকে না। সেটা বাদ দেব। আবার যদি ধরো $\frac{z+1}{2z+2}$ নিই, তবে উপরনীচে কাটাকাটি হয়ে খালি পড়ে থাকে $\frac{1}{2}$. এরকম কেসও আমরা বাদ দেব। তার মানে রাখব খালি সেই সব কেস, যেখানে $az+b$ আর $cz+d$-এর মধ্যে একটাকে কোনো complex সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে অন্যটা পাওয়া যায় না। এই শর্তটাকে গুছিয়ে লেখা যায়--

$$ad-bc\neq 0.$$

এই চেহারাটা দেখে তোমার হয়তো determinant-এর কথা মনে পড়ে যাচ্ছে। সত্যিই, যদি $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ নাও, তবে এই শর্তটা হল $\det(A)\neq 0$.

এই অবধি সমস্যা নেই কোনো। এবার একটা সমস্যা বাঁধবে। লক্ষ করো $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ হলে $z=-\frac{d}{c}$-তে $f(z)$-টা undefined হয়ে যায়, কারণ নীচের তলাটা শূন্য হয়ে যায়। এই undefined হয়ে যাওয়া নিয়ে পরে একটু অসুবিধা হবে, তাই আমরা ওখানে একটু limit লাগাব। লক্ষ করো

$$\lim_{z\to -\frac{d}{c}}\frac{az+b}{cz+d}=\infty$$

হয়, কারণ নীচেরতলার limit-টা 0, আর উপরতলার limit-টা $\neq 0$. তাই আমরা $f\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$ নেব। সুতরাং এখন কিন্তু f-টা আর $\mathbb{C}$ থেকে $\mathbb{C}$-তে রইল না, হয়ে গেল $\mathbb{C}$ থেকে $\mathbb{C}_\infty$-তে। আবার লক্ষ করো

$$\lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d}=\begin{cases}\frac{a}{c} & \text{if } c\neq 0\\ \infty & \text{if } c=0\end{cases}.$$

কারণ $c=0$ হলে $a\neq 0$ হতে বাধ্য, যেহেতু $ad-bc\neq 0$. তাই $c\neq 0$ হলে আমরা $f(\infty)=\frac{a}{c}$ নেব, আর $c=0$ হলে নেব $f(\infty)=\infty$. এর ফলে f হয়ে গেল $\mathbb{C}_\infty$ থেকে $\mathbb{C}_\infty$-তে একটা function. এরকম function-দেরই বলে Möbius function.

সুতরাং সব মিলিয়ে সংজ্ঞাটা দাঁড়ালো--

DEFINITION: Möbius Transform

Let $\mathbb{C}_\infty$ be the extended complex plane. Let $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ such that for $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ we have $\det(A) \neq 0$. Then the **Möbius transform** $M_A : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ is defined as follows.

- If $c \neq 0$, then

$$M_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{if } z \in \mathbb{C}, \quad z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty & \text{if } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{if } z = \infty \end{cases}$$

- If $c = 0$, then

$$M_A(z) = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{if } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{if } z = \infty \end{cases}.$$

এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান। Complex analysis-এ $-\infty$ বলে কিন্তু কিছু নেই। যেমন ধরো $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $M_A(z) = -z$. কিন্তু সংজ্ঞা অনুযায়ী $M_{-1,0,0,1}(\infty) = \infty$-ই হবে, $-\infty$ হবে না। আর হ্যাঁ, এই বইতে আমরা একটা Möbius transform-কে $M_A(z)$ নামে লিখব বটে, কিন্তু এটা কোনো standard notation নয়। Möbius transform-এর কোনো standard notation আছে বলে জানি না। তাই যখনই $M_A(z)$ লিখবে, তখনই কোথাও একটা তার পুরো রূপটা লিখতে দিতে ভুলো না। নীচের অংকটা করলে সড়গড় হয়ে যাবে।

Exercise 15: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ হলে $M_A(z)$-এর পূর্ণ রূপটা লেখো। ■

Example 23: যদি $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হয়, আর $M_A(\infty) = \infty$ হয়, তবে a, b, c আর d-এর মধ্যে একজনের value বলে দিতে পারবে। কোনটার?

SOLUTION: $M_A(\infty) = \infty$ মানে আমরা সংজ্ঞাটার দ্বিতীয় কেসে আছি। সেখানে $c = 0$. ■

এমনিতে $\frac{az+b}{cz+d}$ চেহারাটা সহজই ছিল, কিন্তু এই ∞-র কেসগুলো এসে গিয়ে একটু জটিল দেখাচ্ছে। কিন্তু লক্ষ করো a, b, c, d জানা থাকলে ∞-র কেসগুলো বার করে ফেলতে কোনো অসুবিধা নেই। সেই কারণে অনেক সময়েই লোকে ওই কেসগুলো আর আলাদা করে লেখে না, ওটুকু বুঝে নেয়। যেমন ধরো যদি দ্যাখো কেউ লিখেছে $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ একটা Möbius transform,

Fig 29

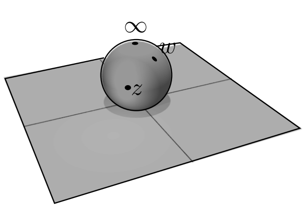
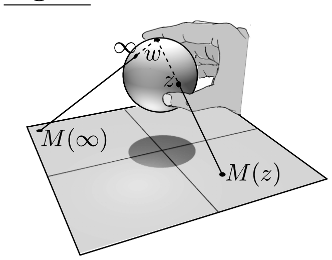


Fig 30



অমনি বুঝবে যে $f(z)$ আসলে $M_A(z)$, যেখানে $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. অতএব--

$$f(z) = M_A(z) = \begin{cases} \frac{z+1}{z-1} & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ \infty & \text{if } z = 1 \\ 1 & \text{if } z = \infty \end{cases}.$$

এই কথাটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা করো।

Exercise 16: নীচের কোন্ function-গুলো Möbius transform বলতে হবে। তাদেরকে $\frac{az+b}{cz+d}$ আকারে লেখো (মানে a, b, c, d কী কী নিতে হবে লেখো)।
(i) $\frac{1}{z}$ (ii) $4+z$ (iii) $\frac{1-z^2}{1+z}$ (iv) $\frac{1}{z+1}$ (v) $\frac{2-z}{z-2}$.
■

11.2 Riemann sphere দিয়ে ক্রিকেট খেলা

কুমড়ো নিয়ে ক্রিকেট খেলে কেন রাজার পিসী?
--সুকুমার রায়

Riemann sphere দিয়ে ভাবলে Möbius transform-দের একটা অদ্ভুত বৈশিষ্ট্য আছে। এই ব্যাপারটা এ বইতে আমাদের খুব যে একটা কাজে লাগবে এমন নয়, তবু মজা লাগতে পারে ভেবে বলছি। Möbius transform-রা হল $\mathbb{C}_\infty$ থেকে $\mathbb{C}_\infty$-তে একেকটা function. আমরা এখানে প্রথম $\mathbb{C}_\infty$-টাকে Riemann sphere বলে কল্পনা করব, আর পরের $\mathbb{C}_\infty$-টাকে কল্পনা করব $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ বলে (মানে complex plane আর তার বাইরে ∞ চতুর্দিকে ছড়িয়ে আছে ধরে নিয়ে)। এবার যা করতে চলেছি সেটা ছবি দিয়ে বুঝতে সহজ। ধরো $\mathbb{C}_\infty$-র কোনো সদস্য নিলে। একে Riemann sphere-এর উপরে একটা বিন্দু বলে ভাবা যায়। আমরা বিভিন্ন কেস বোঝানোর জন্য Fig 29-এ এরকম তিনটে বিন্দু দেখিয়েছি, z, w আর ∞. এবার Riemann sphere-টাকে ক্রিকেট বলের মত হাতে করে নাড়িয়ে চাড়িয়ে ঘুরিয়ে ফিরিয়ে যেভাবে খুশি কোথাও একটা শূন্যে রাখো। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 30-এ। যদি রাখার সময়ে বলটা complex plane-কে ভেদ করে খানিকটা ঢুকেও যেত, তাতেও আপত্তি ছিল না। একটাই খালি শর্ত--sphere-টার কিছুটা যেন complex plane-এর উপরে জেগে থাকে। এই শর্ত মেনে যেভাবেই রাখো না কেন, প্রতিক্ষেত্রে তুমি একটা function পাবে $M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$. কীভাবে পাবে, সেটা Fig 30-এর উদাহরণ দিয়েই বলি--

- এখানে w দ্যাখো একেবারে সর্বোচ্চ বিন্দু হয়ে গেছে। মানে এই নতুন অবস্থানে w-ই হল north pole. তাই আমরা বলব $M(w) = \infty$.
- এবার এই নতুন north pole থেকে একটা রশ্মি ছড়িয়ে দাও, z-এর মধ্যে দিয়ে। complex plane-এর যেখানে রশ্মিটা লাগবে, সেটাই হবে আমাদের $M(z)$.
- একইভাবে আগেকার ∞-টা এখন যেখানে উপস্থিত হয়েছে, সেখান দিয়ে একটা রশ্মি টানো। সেটা complex plane-কে যেখানে ছেদ করবে, সেটাকেই বলব $M(\infty)$.

ভালো ক্রে ভেবে বুঝে নাও যে, এইভাবে তুমি $\mathbb{C}_\infty$ থেকে $\mathbb{C}_\infty$-তে একটা function পাচ্ছ।
এবার আশ্চর্যের কথাটা বলি--

> এইভাবে যে $M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$-টা পাওয়া গেল, সেটা একটা Möbius transform হতে বাধ্য। শুধু তাই নয়, দুনিয়ার যাবতীয় Möbius transform-কেই এইভাবে ক্রিকেট বল নাড়িয়ে চাড়িয়ে পাওয়া যায়!

এটা প্রমাণ করা মোটেই খুব শক্ত কিছু নয়, যদিও আমরা এখানে সে প্রসঙ্গে যাব না। এই ধারণাটাকে খুব রংচঙে করে একটা ভিডিও বানানো হয়েছে, তার নাম Möbius Transformations Revealed. ইচ্ছে করলে youtube-এ দেখতে পারো, বা এইখান থেকে ডাউনলোড করতে পারো--

http://www-users.math.umn.edu/∼arnold/moebius/

11.3 কিছু গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম

খামোখা আমরা Möbius transform-দের নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছি কেন? শুনেছি এদের নানা প্রয়োগ আছে। যেমন ধরো যদি তুমি আলোর গতিবেগের কাছাকাছি গতিবেগে চলতে থাকো, তবে তোমার চারপাশের জগত তোমার চোখে পুরো অন্যরকম দেখাবে। ঠিক কীরকম দেখাবে সেটা নাকি Möbius transform দিয়ে বার করা যায়! যাই হোক, আমরা এ বইতে আলোর গতিবেগের ধারেকাছেও যাবার মতলব করছি না। আমাদের কাছে তাই Möbius transform-এর প্রধান প্রয়োগ হবে ওদেরকে ব্যবহার করে $\mathbb{C}_\infty$-কে ঘেঁটে ঘন্ট করা। এখানে ঘেঁটে ঘন্ট করা বলতে কী বোঝাচ্ছি এবং হঠাৎ সেই কাজটা করার দরকার কেন হবে, সে সব প্রসঙ্গে যাওয়ার আগে প্রথমে Möbius transform-দের কয়েকটা গুরুত্বপূর্ণ ধর্মের কথা জেনে রাখা ভালো।

11.3.1 Continuity

প্রথম গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম হল যেকোনো Möbius transform-ই $\mathbb{C}_\infty$-র সর্বত্র continuous হয়। কোনো function-কে আমরা $\mathbb{C}$-এর উপর continuous কখন বলি সে আলোচনা এই অধ্যায়ের গোড়াতেই করেছি। $\mathbb{C}_\infty$-র উপর continuous হওয়া একইরকম, খালি একটা বাড়তি শর্ত যোগ হবে--

$f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$-কে ∞-তে continuous বলব যদি $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty)$ হয়।

THEOREM

Any Möbius transform is continuous everywhere in $\mathbb{C}_\infty$.

Proof: যেকোনো Möbius transform-রই চেহারা হয় $M_A(z)$-এর মত যেখানে A হল একটা 2×2 সাইজের complex matrix, যার determinant শূন্য নয়। সেইরকম যেকোনো একটা matrix নিয়ে শুরু করি--

Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ be any complex matrix with $\det(A) \neq 0$.

এবার লিখে নিই কী দেখাব--

Shall show

$\forall w \in \mathbb{C}_\infty \quad \lim_{z\to w} M_A(z) = M_A(w)$.

$\forall w$ Take any $w \in \mathbb{C}_\infty$.

এবার দুটো কেস হতে পারে। হয় $w \in \mathbb{C}$ আর নয়তো $w = \infty$.

Case I: $w \in \mathbb{C}$:

As $z \to w$ we have $az + b \to aw + b$ and $cz + d \to cw + d$.

So if $cw + d \neq 0$, then $M_A(z) \to \frac{aw+b}{cw+d} = M_A(w)$.

If $cw + d = 0$, then $aw + b \neq 0$ (since $\det(A) \neq 0$)

⟦ Because:

Since $ad - bc \neq 0$ and $cw + d = 0$, so $c \neq 0$.

কারণ $c = 0$ হলে $cw + d = d = 0$. কিন্তু c আর d দুজনেই তো আর একই সঙ্গে 0 হতে পারে না, তাহলে তো $ad - bc = 0$ হয়ে যাবে!

So $w = -\frac{d}{c}$. Hence $aw - b = \frac{ad}{c} - b = \frac{ad-bc}{c} \neq 0$.

⟧

So $M_A(z) \to \infty = M_A(w)$.

এবার অন্য কেসটা--

Case 2: $w = \infty$:

Here

$$\lim_{z\to\infty} M_A(z) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{if } c \neq 0 \\ \infty & \text{if } c = 0 \end{cases}.$$

Also

$$M_A(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{if } c \neq 0 \\ \infty & \text{if } c = 0 \end{cases}.$$

So $\lim_{z\to w} M_A(z) = M_A(w)$, as required.

[Q.E.D]

11.3.2 Group property

এবার এক গুচ্ছ theorem শিখব যেগুলো খুব কাজে লাগে।

THEOREM

For any two matrices $A_{2\times 2}$ and $B_{2\times 2}$ with $\det(A) \neq 0$ and $\det(B) \neq 0$ we have

$$M_A \circ M_B = M_{AB}.$$

Proof:

Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

Then

$$AB = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix}.$$

Now $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. So $M_{AB}(z)$ is a Möbius transform.

আমরা এবার দেখাতে চাই যে, যাই $z \in \mathbb{C}_\infty$ নাও না কেন $M_A(M_B(z)) = M_{AB}(z)$ হবে। দাঁতে দাঁত চেপে করে গেলে কাজটা গায়ের জোরে নামিয়ে দেওয়া যাবে বটে, কিন্তু এতগুলো কেস আসবে যে, মাথা খারাপ হবার জোগাড় হবে। তাই আমরা একটা কৌশল করব। এখানে মোদ্দা জিনিসটা হল এইটা দেখানো--

$$\frac{aM_B(z)+b}{cM_B(z)+d} = \frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)}.$$

একরাশ কেস এসে যাবার কারণ হল বিভিন্নভাবে নীচের তলায় শূন্য এসে গিয়ে ∞ হয়ে যাওয়ার বা $z=\infty$ হওয়ার জন্য। আমরা প্রথমে সেই সব বিচ্ছিরি বিচ্ছিরি কেসগুলো বাদ দিয়ে মোদ্দা জিনিসটা করে নেব--

> Let $z \in \mathbb{C}$ be such that $M_B(z)$, $M_A(M_B(z))$ and $M_{AB}(z)$ are all finite. Then
>
> $$\begin{aligned} M_A(M_B(z)) &= \frac{aM_B(z)+b}{cM_B(z)+d} \\ &= \frac{a\times\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\times\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d} \\ &= \frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)} \\ &= M_{AB}(z). \end{aligned}$$

এইবার লক্ষ করো যে, আমাদের প্রমাণটা এখনো করা হয় নি কিছু কিছু $z \in \mathbb{C}_\infty$-র জন্য--

- এক, $z=\infty$-র জন্য করা হয়নি।
- দুই, সেইসব $z \in \mathbb{C}_\infty$ যাদের জন্য $M_B(z)=\infty$ হয় সেরকম z-ও বাকি আছে।
- তিন, সেইসব $z \in \mathbb{C}_\infty$-এর জন্য যাদের বেলায় $M_A(M_B(z))=\infty$ হয়।
- চার, সেইসব $z \in \mathbb{C}_\infty$ যাদের জন্য $M_{AB}(z)=\infty$ হয়।

এবার Möbius transform-এর সংজ্ঞার দিকে তাকালেই দেখবে যেকোনো Möbius transform-ই ∞ হয় ঠিক একটাই $z \in \mathbb{C}_\infty$-র জন্য।

> We know from the definition of Möbius transform that any Möbius transform becomes ∞ at exactly one point in $\mathbb{C}_\infty$.

সুতরাং আমাদের প্রমাণ থেকে আমরা এ যাবৎ z-এর বড়জোর[2] চারটে সমস্যাজনক value বাদ রেখেছি।

> Thus $M_A(M_B(z)) = M_{AB}(z)$ for all $z \in \mathbb{C}_\infty$ except at most four points in $\mathbb{C}_\infty$.

এবারই কৌশলের আসল প্যাঁচটা।

[2]এখানে "বড়জোর" বললাম, কারণ z-এর এই চারটে সমস্যাজনক value আলাদা আলাদা নাও হতে পারে।

> We know that any Möbius transform is a continuous function from $\mathbb{C}_\infty$ to $\mathbb{C}_\infty$.
> So $M_A \circ M_B$ and M_{AB} are both continuous functions on $\mathbb{C}_\infty$ and they are equal for all but finitely many points, so they must be equal everywhere.

এইটা কী বোঝা গেল? ধরো $z = \infty$ নিলাম। আমরা দেখাব $M_A(M_B(\infty)) = M_{AB}(\infty)$ হবে। প্রথমে এবার যে কোনো একটা sequence নাও যেটা ∞-তে যায়, ধরো $z_n = n$ নিলাম। তবে $M_A(M_B(n)) = M_{AB}(n)$ হবে (n-এর বড়জোর তিনটে সমস্যাজনক value বাদে, চতুর্থ সমস্যাজনক value তো ∞ নিজেই)। দু দিকের limit নাও--

$$\lim_{n\to\infty} M_A(M_B(n)) = \lim_{n\to\infty} M_{AB}(n).$$

যেহেতু continuous, তাই limit দুটো "ভেতরে ঢুকে যাবে", মানে--

$$M_A(M_B(\infty)) = M_{AB}(\infty),$$

ঠিক যেমনটা আমাদের দরকার ছিল। একইভাবে z-এর বাকী দুটো value-তেও দেখানো যাবে। **[Q.E.D]**

এবার আরেকটা theorem বলছি, যেটা প্রমাণ করা খুবই সহজ।

THEOREM

The Möbius transform $M_I(z)$ is the identity function, *i.e.*,

$$\forall z \in \mathbb{C}_\infty \quad M_I(z) = z.$$

সংজ্ঞা লাগলেই প্রমাণ হয়ে যাবে।

THEOREM

The Möbius transform $M_A(z)$ has inverse $M_{A^{-1}}(z)$.

Fig 31

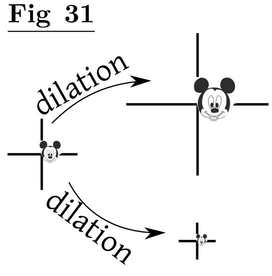
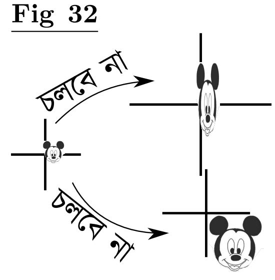


Fig 32



এটা প্রমাণ করার দায়িত্বও তোমাকেই দিলাম। খালি আগের দুটো theorem লাগাও। এক লাইনে হয়ে যাবে। এই theorem-টা থেকে আরেকটা গুরুত্বপূর্ণ জিনিসও পাওয়া যাচ্ছে--যেকোনো Möbius transform-ই one-one এবং onto হয় (মানে bijection হয়), নইলে আর inverse আসে কী করে?
এই যে তিনটে theorem শিখলে, এদেরকে এক সঙ্গে অনেক সময়ে Möbius transform-দের group property বলে। কারণ যদি যাবতীয় Möbius transform নিয়ে একটা সেট বানাও, তবে এই তিনটে theorem বলছে যে, সেই সেটটা একটা group হবে। এখানে binary operation-এর ভূমিকাটা পালন করছে function composition. যদি group কাকে বলে ভুলে গিয়ে থাকো, তবে দুশ্চিন্তা কোরো না, ওটা না জানলেও এই বই পড়তে কোনো অসুবিধা হবে না।

11.3.3 বিভিন্ন অংশে ভাঙা

Möbius transform-দের নিয়ে সহজে চিন্তা করার দুটো কায়দা আছে--

- এক, Riemann sphere-কে ক্রিকেটবলের মত নাড়িয়ে চাড়িয়ে,
- দুই, সব Möbius transform-কেই মাত্র চারটে বিশেষ ধরণের Möbius transform দিয়ে প্রকাশ করে।

দ্বিতীয় পদ্ধতিটার মূল চাবিকাঠি হল নীচের theorem-টা।

THEOREM

The following functions from $\mathbb{C}_\infty$ to $\mathbb{C}_\infty$ are Möbius transforms:

- translation: $\mathcal{T}_t(z) = \begin{cases} z+t & \text{if } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{if } z = \infty \end{cases}$ for some $t \in \mathbb{C}$,
- dilation: $\mathcal{D}_r(z) = \begin{cases} rz & \text{if } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{if } z = \infty \end{cases}$ for some real $r > 0$,
- rotation: $\mathcal{R}_\theta(z) = \begin{cases} e^{i\theta}z & \text{if } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{if } z = \infty \end{cases}$ for some $\theta \in \mathbb{R}$,
- inversion: $\mathcal{I}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{if } z = 0 \\ 0 & \text{if } z = \infty \end{cases}$.

Also, every Möbius transform is a composition of these.

এখানে "dilation" (ডাইলেশন) বলে একটা শব্দ ব্যবহার করেছি, এর মানে হল সবদিকে সমানভাবে বড় করা বা ছোটো করা (যেমন দ্বিগুণ করা বা অর্ধেক করা, এইরকম)। দুটো উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 31-এ। কিন্তু Fig 32-এ দেখানো উদাহরণ দুটো চলবে না। প্রথম ক্ষেত্রে সব দিকে সমানভাবে ছোটো বড়ো করা হয় নি, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সমস্যা হল origin-এর সাপেক্ষে অবস্থান বদলে গেছে। সেটা চলবে না, কারণ dilation-এর সময়ে ছোটো বা বড় করাটা হয় origin-কে কেন্দ্র করে, অর্থাৎ origin-এর সাপেক্ষে কারো অবস্থান বদলাবে না।
Proof: প্রথমে দেখাব যে, এই চার ধরণের function-ই একেকটা Möbius transform. আমরা জানি যেকোনো Möbius transform-ই দেখতে $M_A(z)$-এর মত, যেখানে $A_{2\times 2}$ একটা complex matrix যাতে $\det(A) \neq 0$. সুতরাং আমরা এই চার ধরণের function-এর প্রতিটার জন্য একটা করে এরকম matrix দেব।

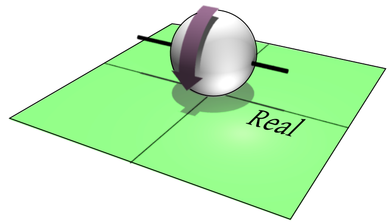


Fig 33

First part: Let $P = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Then $\det(P) = 1 \neq 0$. Clearly, $\mathcal{T}_t = M_P$.

যদি ব্যাপারটা স্পষ্ট না হয়ে থাকে, তবে কয়েকটা ধাপ কষেই দেখাই। Möbius transform-র সংজ্ঞা থেকে পাচ্ছি

$$M_P(z) = \begin{cases} 1 \times z + t = z + t & \text{if } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{if } z = \infty \end{cases}.$$

সেটাই তো $\mathcal{T}_t(z)$-এরও সংজ্ঞা। ব্যস্!

Let $Q = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Then $\det(Q) = r \neq 0$. Clearly, $\mathcal{D}_r = M_Q$.

Let $R = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Then $\det(R) = e^{i\theta} \neq 0$. Clearly, $\mathcal{R}_\theta = M_R$.

Let $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Then $\det(S) = -1 \neq 0$. Clearly, $\mathcal{I} = M_S$.

এবার theorem-এর দ্বিতীয় অংশটা নিয়ে পড়া যাক। এখানে আমরা দেখাব যে, যেকোনো Möbius transform-কেই এই চারটে বিশেষ ধরণের Möbius transform-র composition হিসেবে প্রকাশ করা যায়। প্রথমে যেকোনো একটা Möbius transform নিয়ে শুরু করব। যেকোনো Möbius transform-রই চেহারা হল $M_A(z)$-র মত যেখানে $\det(A) \neq 0$. তাই গোড়াতেই এরকম একটা A নেওয়া যাক--

Second part:

Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, where $ad - bc \neq 0$.

Case I: $c = 0$: Here $d \neq 0$ and

$$M_A(z) = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{if } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{if } z = \infty \end{cases}.$$

Since $c = 0$, hence $a \neq 0$. So $\frac{a}{d} = re^{i\theta}$ for some $r > 0$ and $\theta \in \mathbb{R}$.

Thus, for $z \in \mathbb{C}$ we can decompose $z \mapsto M_A(z)$ as

$$z \xmapsto{\mathcal{R}_\theta} e^{i\theta}z \xmapsto{\mathcal{D}_r} re^{i\theta}z \xmapsto{\mathcal{T}_b} re^{i\theta}z + b.$$

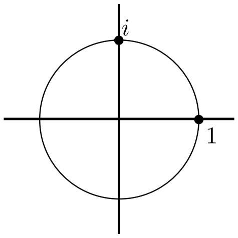


Fig 34

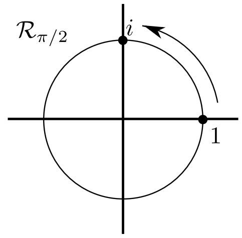


Fig 35

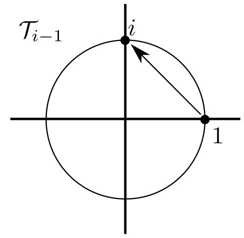


Fig 36

This also works for $z = \infty$, since

$$\infty \xmapsto{\mathcal{R}_\theta} \infty \xmapsto{\mathcal{D}_r} \infty \xmapsto{\mathcal{T}_b} \infty.$$

Hence $M_A = \mathcal{T}_b \circ \mathcal{D}_r \circ \mathcal{R}_\theta$, as required.

Case 2: $c \neq 0$: Here

$$M_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{if } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{if } z = \infty \end{cases},$$

ie,

$$M_A(z) = \begin{cases} p + \frac{q}{z+s} & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \{-s\} \\ \infty & \text{if } z = -s \\ \frac{a}{c} & \text{if } z = \infty \end{cases},$$

where $p = \frac{a}{c}$, $q = \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}$ and $s = \frac{d}{c}$.

Here $q = -\frac{\det(A)}{c^2} \neq 0$, and so can be written as $q = re^{i\theta}$ for some $r > 0$ and $\theta \in \mathbb{R}$.

So, for $z \in \mathbb{C} \setminus \{-s\}$, we can decompose $z \mapsto M_A(z)$ as

$$z \xmapsto{\mathcal{T}_s} z + s \xmapsto{\mathcal{I}} \frac{1}{z+s} \xmapsto{\mathcal{R}_\theta} \frac{e^{i\theta}}{z+s} \xmapsto{\mathcal{D}_r} \frac{re^{i\theta}}{z+s} \xmapsto{\mathcal{T}_p} p + \frac{re^{i\theta}}{z+s}.$$

Fig 37

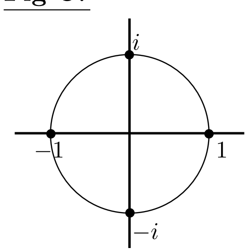


Fig 38

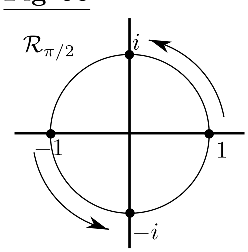
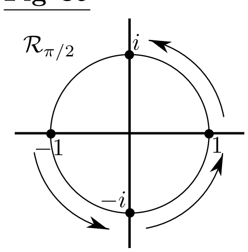


Fig 39



It also works for $z=-s$, since

$$-s \xmapsto{\mathcal{T}_s} 0 \xmapsto{\mathcal{I}} \infty \xmapsto{\mathcal{R}_\theta} \infty \xmapsto{\mathcal{D}_r} \infty \xmapsto{\mathcal{T}_p} \infty.$$

It also works for $z=\infty$, since

$$\infty \xmapsto{\mathcal{T}_s} \infty \xmapsto{\mathcal{I}} 0 \xmapsto{\mathcal{R}_\theta} 0 \xmapsto{\mathcal{D}_r} 0 \xmapsto{\mathcal{T}_p} p.$$

Hence $M_A = \mathcal{T}_p \circ \mathcal{D}_r \circ \mathcal{R}_\theta \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{T}_s$, as required.

[Q.E.D]

এই theorem-টা থেকে জানা যাচ্ছে যে, যাবতীয় Möbius transform-দের মধ্যে এই চার ধরণের Möbius transform-ই হল নাটের গুরু। বাকিরা সকলেই এদেরই সন্তান-সন্ততি। সুতরাং যদি কোথাও কোনো ধর্ম দিয়ে দেখাতে বলে যে সেটা সব Möbius transform-এর জন্যই খাটে, তবে সাধারণতঃ এই চারটে নাটের গুরুর জন্য দেখালেই চলে।

> ওই শিশি বোতলের জায়গাটা একটু শক্ত ঠেকল। তাছাড়া তো শক্ত আর কিছু পেলাম না।
>
> --সুকুমার রায় (হ য ব র ল)

এদের মধ্যে সবগুলোকেই সহজে ছবি দিয়ে ভাবা যায়, খালি ওই inversion-টা একটু ঝকমারি। তাই Möbius transform-এর বিভিন্ন ধর্ম প্রমাণ করার সময়ে সাধারণতঃ ওই inversion অংশটার জন্য একটু বেশী খাটতে হয়। এরকম কিছু ধর্ম শিখব কালকে। আপাততঃ নীচের অংকটা করে কল্পনাশক্তিতে শান দিয়ে নাও।

Exercise 17: এই যে চারটে বিশেষ Möbius transform-এর কথা শিখলে, এদেরকে কী করে ক্রিকেট বল দিয়ে বানাবে?

HINT: একটু ধরিয়ে দিচ্ছি। ধরো ক্রিকেট বলটাকে সোজা উপর দিকে তুললে (কোনো রকম না ঘুরিয়ে), যাতে ওর north pole-টা complex plane-র উপরে 2 উচ্চতায় থাকে (শুরুতে 1 উচ্চতায় ছিল)। তাহলে আলোর উৎসটা (মানে north pole-টা) এখন পর্দার থেকে (মানে complex plane-এর থেকে) দ্বিগুণ দূরত্বে সরে গেল। আর সবই আগের মতই আছে, সুতরাং ছায়াগুলোও সব দ্বিগুণ বড় হয়ে যাবে, নয় কি? সুতরাং $\mathcal{D}_r$ মানে হল ক্রিকেট বলটাকে vertically ওঠানো বা নামানো, যাতে north pole-টা r উচ্চতায় থাকে। একইভাবে $\mathcal{T}_t$ আর $\mathcal{R}_\theta$-র বেলাতেও ক্রিকেট বলের গতিটা বার করতে পারবে। Inversion-এর কেসটা সামান্য শক্ত। চিন্তা করেই দ্যাখো! Fig 33 দেখলে সুবিধা হতে পারে। ■

DAY 12
Möbius transform (part 2)

12.1 ত্রিশুলের আক্রমণ

Example 24: এমন একটা Möbius transform দিতে পারো যেটা 1-কে i-তে নিয়ে যায়? Fig 34 দেখলে সুবিধা হতে পারে।

SOLUTION: এরকম নানা Möbius transform সম্ভব। একটা হল $M_1 = \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$, মানে 90° ঘোরানো (Fig 35)। আরেকটা হল Fig 36-এর মত টানতে টানতে 1-টাকে i-তে নিয়ে ফেলা, $M_2 = \mathcal{T}_{i-1}$. আরো জটিল পথেও করা সম্ভব, প্রথমে inversion লাগাও, তাতে 1-টা 1-এই থাকবে, এরপর Fig 35-র মত $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ লাগাও, মানে $M_3 = \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}} \circ \mathcal{I}$. আরো অনেকভাবেই সম্ভব, কোনো রাতে ঘুম না এলে ভেড়া না গুণে এরকম আরো Möbius transform বার করার চেষ্টা করতে পারো। ■

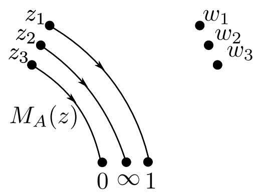


Fig 40

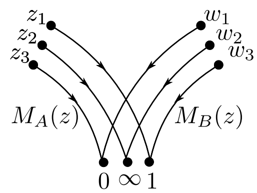


Fig 41

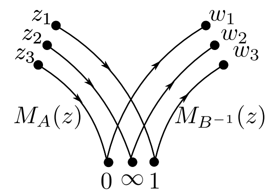


Fig 42

এবার অংকটাকে একটু জটিল করি।

Example 25: এমন একটা Möbius transform দিতে পারো যেটা 1-কে i-তে তো নেয়ই, সেইসঙ্গে -1-কে আবার $-i$-এও নিয়ে যায়? Fig 37 দেখে নাও।
SOLUTION: একটু চিন্তা করলেই দেখবে, আগের অংকের M_1 দিয়ে এখনও কাজ চলবে (Fig 38), কিন্তু M_2 দিয়ে হবে না। অবশ্য M_3 দিয়েও চলবে (কারণ inversion করলে -1-টা -1-এই থাকে)। এরকম আরো অনেক Möbius transform সম্ভব। ■

এবার আরেকটা শর্ত বাড়াই।

Example 26: এবার এমন একটা Möbius transform দিতে হবে যেটা 1-কে i-তে নেয়, -1-কে $-i$-তে নেয়, এবং $-i$-কে 1-এ নিয়ে যায়।
SOLUTION: এবার M_3 দিয়ে আর কাজ হবে না। তবে M_1 এখনও কাজ করবে (Fig 39)। ■

এরকম আর কোনো Möbius transform কী সম্ভব? উত্তর হল--না, রকম খালি একটাই Möbius transform সম্ভব, এবং সেটা হল M_1. শুধু তাই নয়, আসলে--

> যদি যেকোনো তিনটে distinct $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ আর যেকোনো তিনটে distinct $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ দেওয়া থাকে, তবে সব সময়েই একটা Möbius transform পাবে, যেটা z_i-দেরকে যথাক্রমে w_i-গুলোতে নিয়ে ফেলে। শুধু তাই নয়, এরকম খালি একটাই Möbius transform পাওয়া যাবে।

এটা আমরা এক্ষুণি গুছিয়ে লিখে প্রমাণ করব। কিন্তু আগে এটা ব্যবহার করে কয়েকটা ঠকানো প্রশ্ন দিই।

Example 27: একটা Möbius transform দিলাম $M(z)$ যাতে $M(1) = 2$, $M(i) = i + 1$ এবং $M(0) = 1$ হয়। তবে $M(2 + 3i)$ কত হবে?
SOLUTION:দেখাই যাচ্ছে যে, $M(z) = z + 1$ হলে তিনটে শর্তই পালিত হয়। ওদিকে আমরা জানি যে, এরকম একটাই খালি Möbius transform সম্ভব। তার মানে $M(z) = z + 1$ হতে বাধ্য! অতএব $M(2+3i) = (2+3i)+1 = 3+3i$ হবে। ■

Example 28: ধরো $M_A(1) = 4 - i$, $M_A(i) = 29 + 3i$ এবং $M_A(2i) = -e^i$. যদি $M_B(4 - i) = 1$, $M_B(29 + 3i) = i$ এবং $M_B(-e^i) = 2i$ হয়, তবে $M_{BA}(2 + 5i)$ কত হবে?
SOLUTION: $M_{BA}(1) = 1$, $M_{BA}(i) = i$ এবং $M_{BA}(2i) = 2i$ হচ্ছে। এরকম ঠিক একটাই Möbius transform সম্ভব, এবং দেখাই যাচ্ছে যে, identity function হচ্ছে এরকম একটা Möbius transform সুতরাং M_{BA} নির্ঘাত identity function-ই হতে বাধ্য। অতএব $M_{BA}(2 + 5i) = 2 + 5i$. ■

এইবার আমরা সব কিছু গুছিয়ে লিখে প্রমাণ করব।

> **THEOREM**
>
> Given any three distinct points $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ and three distinct points $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$, there exists a unique Möbius transform that maps each z_i to the corresponding w_i.

এখানে z_i-রা নিজেদের মধ্যে distinct, আবার w_i-রাও তাই। কোনো z_i কিন্তু কোনো w_j-র সমান হতেই পারে। এমন কি সব i-এর জন্যই $z_i = w_i$ হলেও আপত্তি নেই!

Proof: আমাদের কাজ হল z_i তিনটেকে w_i-গুলোতে নিয়ে ফেলা। প্রথম ধাপে আমরা w_i-দের তাকাবই না। আমরা এমন একটা Möbius transform বার করব, যেটা z_i-দেরকে $0, \infty, 1$-এ এনে ফেলে (Fig 40)। ধরো এই Möbius transform-টার নাম M_A. এখানে A-টা অবশ্যই z_i-দের উপর নির্ভর করে। যদি এবার z_i-দের বদলে w_i বসাই তবে A-র বদলে কোনো B পাবে, এবং M_B-টা একইভাবে w_i-দেরকে এনে ফেলবে $0, \infty, 1$-এ এনে ফেলবে (Fig 41)। তাহলে M_B^{-1} উল্টো কাজটা করবে, মানে $0, \infty, 1$-দেরকে নিয়ে ফেলবে w_i-গুলোতে। সুতরাং $M_B^{-1}(M_A(z))$ কী করবে বুঝতেই পারছ, z_i-দের সোজা নিয়ে ফেলবে w_i-দের উপরে (Fig 42)। সেটাই আমাদের দরকার। আর $M_B^{-1}(M_A(z))$ মানে যে $M_{B^{-1}A}(z)$ সে তো আমরা জানিই, তার মানে আমরা z_i-দেরকে w_i-গুলোতে নিয়ে যেতে পারলাম একটা Möbius transform ব্যবহার করে। যেমন, কলকাতায় ধর্মতলা এমন একটা জায়গা, যেটা সব জায়গার সাথেই যুক্ত। সেখান থেকে কলকাতার যেকোনো জায়গায় যাওয়া যায়। তাই কলকাতার এক জায়গা থেকে আরেক জায়গায় যাওয়ার একটা পথ হল ধর্মতলা হয়ে যাওয়া। আমাদের কায়দায় $0, \infty, 1$ এই ধর্মতলার কাজটা করছে। অবশ্যই $0, \infty, 1$-এর বদলে $\mathbb{C}_\infty$-র অন্য যে কোনো তিনটে distinct সদস্য নিলেও চলত।

> **Existence:**
>
> Step 1: Shall construct $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ with $\det(A) \neq 0$ such that M_A takes z_1, z_2, z_3 to $0, \infty, 1,$ respectively.
>
> Case 1: All z_i's are finite.
>
> Since $M_A(z_2) = \infty$ and z_2 is finite, hence $c \neq 0$.
>
> Hence we need $az_1 + b = 0$ and $cz_2 + d = 0$ and $az_3 + b = cz_3 + d$.
>
> So $b = -az_1$ and $d = -cz_2$ and $az_3 - az_1 = cz_3 - cz_2$, or $a(z_3 - z_1) = c(z_3 - z_2)$.
>
> Thus, one possible solution is $a = z_3 - z_2$ and $c = z_3 - z_1$. So $b = -z_1(z_3 - z_2)$ and $d = -z_2(z_3 - z_1)$.
>
> Case 2: Some z_i is ∞: W.l.g., $z_2 = \infty$.
>
> Since $M_A(\infty) = \infty$, hence taking $c = 0$. we need $az_1 + b = 0$ and $az_3 + b = d$.
>
> So $b = -az_1$ and $d = az_3 - az_1 = a(z_3 - z_1)$.
>
> One possible solution is $a = 1,\ d = z_3 - z_1$ and $b = -z_1$.
>
> Step 2: By replacing z_i's with w_i's we similarly get a matrix $B_{2\times 2}$ with $\det(B) \neq 0$ such that M_B takes w_1, w_2, w_3 to $0, \infty, 1,$ respectively.
>
> So the Möbius transform $M_{B^{-1}}$ takes $0, \infty, 1$ to $w_1, w_2, w_3,$ respectively.
>
> Hence $M_{B^{-1}} \circ M_A$ takes z_1, z_2, z_3 to $w_1, w_2, w_3,$ respectively.

> We know that $M_{B^{-1}} \circ M_A = M_{B^{-1}A}$ is a Möbius transform, as required.

এবার আমরা uniqueness দেখাব। এর জন্য আমরা দেখাব যে, যদি দুজন লোকে দুটো Möbius transform এমন দেয় যে দুটোই z_i-দেরকে w_i-গুলোতে নিয়ে ফেলে, তবে আসলে Möbius transform দুটো একই হতে বাধ্য।

> Uniqueness : Let $M_1(z)$ and $M_2(z)$ both be Möbius transforms such that
>
> $$M_1(z_i) = M_2(z_i) = w_i \text{ for } i = 1, 2, 3.$$
>
> Then by property of Möbius transforms we know that $M_1^{-1}(M_2(z))$ is also a Möbius transform, $M_A(z)$, say, for some $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ with $\det(A) \neq 0$.
>
> Then we have $M_A(z_i) = z_i$ for $i = 1, 2, 3$.

কারণ M_2-টা z_i-দেরকে w_i-তে নিয়ে যাবে, আর M_1 ফের ওদেরকে z_i-তে ফিরিয়ে আনবে। এবার দুটো কেস করতে হবে, z_i-দের মধ্যে কেউ ∞ আছে কিনা, তার ভিত্তিতে--

> Case 1: The z_i's are all finite:
>
> Here $M_A(z_i) = z_i$ for $i = 1, 2, 3$.
> So the equation $\frac{az+b}{cz+d} = z$ has at least three distinct roots, z_1, z_2, z_3.
> Thus, $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ has three distinct roots.
> Now, the LHS is either 0 or a polynomial of degree ≤ 2. But no polynomial of degree ≤ 2 can have 3 distinct roots.
> Hence the LHS must be 0, ie, $cz^2 + (d-a)z - b \equiv 0$.
> So, equating coefficients, $c = b = 0$ and $a = d$.
> Hence
>
> $$M_A(z) = \begin{cases} \frac{az}{a} = z & \text{if } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{if } z = \infty \end{cases},$$
>
> ie, M_A is the identity function.
> So $M_1^{-1} \circ M_2 =$ identity.
> Hence $M_1 = M_2$, as required.

এবার অন্য কেসটা--

> Case 2: Some z_i is ∞: W.l.g., $z_1 = \infty$.
>
> Then $M_A(\infty) = \infty$.
> Hence $M_A(z)$ must be of the form $M_A(z) = pz + q$ when $z \in \mathbb{C}$ (for some $p, q, \in \mathbb{C}$).

এই ধাপটা যদি স্পষ্ট না হয়, তবে Möbius transform-এর সংজ্ঞাটা একবার দেখে নাও। দেখবে সেখানে $c = 0$ আর $c \neq 0$-র জন্য সংজ্ঞাটা সামান্য আলাদা। $M_A(\infty) = \infty$ হয় একমাত্র $c = 0$ কেসেই। সুতরাং তখন $M_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ হয়। আমরা $\frac{a}{d}$-কেই p আর $\frac{b}{d}$-কে q নাম দিয়েছি।

বলা আছে $M_A(z_2) = z_2$ আর $M_A(z_3) = z_3$, তাই--

> Since $pz_2 + q = z_2$ and $pz_3 + q = z_3$, hence we must have $p = 1, q = 0$, because $z_2 \neq z_3$.

এটা বোঝা গেল তো? একটা থেকে অন্যটা বিয়োগ করে দিলে পাবে $p(z_2 - z_3) = z_2 - z_3$. যেহেতু $z_2 - z_3 \neq 0$, তাই $z_2 - z_3$ দিয়ে ভাগ করতে পারবে।

> So again $M_A(z)$ is the identity function, as required.
>
> Thus $M_1 = M_2$, proving uniqueness.

[Q.E.D]

আমরা তাহলে শিখলাম যে, যেকোনো তিনটে distinct $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ এবং তিনটে distinct $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ দেওয়া থাকলে ঠিক একটাই $M_A(z)$ পাওয়া যায়, যেটা z_i-দেরকে w_i-গুলোতে নিয়ে যায়। আচ্ছা, ধরো সত্যিই কিছু z_i আর w_i দিয়ে তোমাকে হাতেকলমে M_A-টা বার করতে বললাম। কী করে করবে?
কোনো প্যাটার্ন যদি চোখে পড়ে যায়, তবে অনেক সময়ে কিছু কষ্ট না করেই Möbius transform-টা লিখে দেওয়া যায়। যেমন নীচের উদাহরণে--

Example 29: এমন $M_A(z)$ দাও যেটা $1, 2, 3$-কে যথাক্রমে $i+1, 2i+2, 3i+3$-তে নিয়ে যায়।

SOLUTION: প্যাটার্ন দেখেই বোঝা যাচ্ছে $M_A(z) = z(1+i)$ হতে হবে। ■

যদি এরকম সহজ প্যাটার্ন চোখে না পড়ে, তবে একটা general কায়দা হল আমরা theorem-এর existence অংশটা যেভাবে প্রমাণ করেছিলাম, সেইভাবে এগোনো, মানে প্রথমে z_i-দেরকে $0, \infty, 1$ এবং তারপর $0, \infty, 1$-কে w_i-গুলোতে নিয়ে যাওয়া। অথবা যেকোনো $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ধরে নিয়ে খেটেখুটে a, b, c, d বার করার চেষ্টাও করা যায়। কিন্তু এসব ছাড়াও একটা কৌশল আছে, যেটা বেশ অদ্ভুত, বলে না দিলে কল্পনা করাও শক্ত। এবার সেটাই শিখব।

12.2 Invariant

একটা Möbius transform লাগালে পরে $\mathbb{C}_\infty$-র বিন্দুগুলো বিভিন্ন জায়গায় ছড়িয়ে ছিটিয়ে যায়। কিন্তু ওদের মধ্যে একটা জিনিস কিছুতেই বদলায় না। এই রকম ধর্মকে বলে **invariant** (ইন্‌ভ্যারিয়ান্ট)। এরকম ধর্ম জানা থাকলে অনেক কাজে লাগে। বাস্তবজীবনে এর একটা উদাহরণ আমরা সবাই জানি--আঙুলের ছাপ। একটা মানুষ যতই নিজের বেশভুষা পরিবর্তন করুক না কেন, তার আঙুলের ছাপ কোনোভাবেই বদলাবে না। এই invariant-টা ব্যবহার করে গোয়েন্দারা কত রহস্যের কিনারা করে ফেলেন, সে তো তোমরা জানোই। অংকের দুনিয়ার গোয়েন্দাগিরির কাজেও invariant-এর তুলনা নেই[3]।
Möbius transform-এর বেলায় একটা জিনিস যেটা বদলায় না সেটা হল **cross-ratio**, যার সংজ্ঞাটা এইরকম--

DEFINITION: **Cross-ratio**

For four *distinct* points $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ their **cross-ratio** is defined as

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}.$$

If some $z_i = \infty$, then the cross-ratio is defined in the same way but dropping the two factors involving z_i.

[3]এরকম একটা মজার উদাহরণ আছে আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Modern Algebra বইটায়।

ফর্মুলাটা গোলমেলে লাগতে পারে। মনে রাখার জন্য লক্ষ করো--

- উপর নীচ দুদিকেই দুখানা করে $z_i - z_j$ জাতীয় জিনিস আছে।
- প্রতিটা $z_i - z_j$-তেই মাইনাসের আগে আছে z_1 বা z_3, আর পরে আছে z_2 বা z_4.
- উপর তলাটা মনে রাখা সহজ, কারণ z_i-গুলো পরপর আছে, $(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)$. এবার নীচের তলাটা হিসেব করে বার করে ফেলা যাবে, কারণ মাইনাসের আগে খালি z_1 বা z_3 থাকবে, সুতরাং $(z_1 - *)(z_3 - *)$ চেহারার হবে। প্রতিটা $*$-এর জায়গায় z_2 বা z_4 হবে। যেহেতু $z_1 - z_2$ আর $z_3 - z_4$ উপরতলায় আছেই, তাই নীচের জন্য বাকি পড়ে রইল $z_1 - z_4$ আর $z_3 - z_2$.
- Cross-ratio-র জন্য চিহ্নটা বেশ অদ্ভুত, z_1, z_2, z_3, z_4 পরপর লিখে দুপাশে খালি গোল ব্র্যাকেট বসিয়ে দেওয়া।
- সংজ্ঞাটায় কোনো $z_i = \infty$ হওয়া নিয়ে কিছু বলা আছে। সেই ব্যাপারটা একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝাই। প্রথমে লক্ষ করো, যাই z_i নাও, সেটা ঠিক দুটো factor-এর মধ্যে রয়েছে, একটা উপরতলায় অন্যটা নীচের তলায়। যেমন z_2 রয়েছে উপরতলায় $(z_1 - z_2)$-তে আর নীচের তলায় $(z_3 - z_2)$-তে। যদি $z_2 = \infty$ হয়ে যায়, তবে এই দুটো factor-কে বাদ দিয়ে লিখবে
$$(z_1, \infty, z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)}.$$
যদি $z_3 = \infty$ হত, তবে পেতে
$$(z_1, z_2, \infty, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_4)}.$$
- Cross-ratio বার করা হয় $\mathbb{C}_\infty$ যেকোনো চারজন distinct সদস্যের জন্য। তাই একাধিক z_i একই সঙ্গে ∞ হতে পারে না।

Möbius transform-এর আলোচনায় cross-ratio-র গুরুত্ব হল নীচের theorem-টার জন্য। এই theorem-টাই বলছে যে cross-ratio-রা Möbius transform করলেও বদলায় না।

THEOREM

Let $M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ be any Möbius transform. Then for any distinct $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ we have
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (M(z_1), M(z_2), M(z_3), M(z_4)).$$

এটাকে প্রমাণ করা মোটেই শক্ত কিছু নয়, কিন্তু তাও আমরা এ বইতে পুরো প্রমাণটা দেব না, কারণ প্রচুর কেসে কেসে ভেঙে করতে হবে (যদিও অধিকাংশ কেসই দু-তিন লাইনেই হয়ে যাবে)। মূল কৌশলটা হল সবরকম Möbius transform-র জন্য প্রমাণটা না করে খালি সেই বিশেষ চার ধরণের Möbius transform-র জন্য প্রমাণটা করা--translation, rotation, dilation আর inversion.

> Any Möbius transform is a composition of translation, rotation, dilation and inversion.

সুতরাং যদি দেখাতে পারি যে translation, rotation, dilation আর inversion-এর ফলে cross-ratio বদলায় না, তবেই হল।

> So enough to show that cross-ratio is invariant under these transformations.

প্রথমে translation-এর কথাই ধরো। Translation মানে হল সবগুলো z_i-এর সঙ্গেই t যোগ করা। বুঝতেই পারছ যে, $z_i - z_j$ বার করার সময়ে t-গুলো দিব্যি কেটে যাবে।

> For any translation the terms $(z_i - z_j)$ will remain unchanged.
>
> So the cross-ratio does not change.

Rotation আর dilation করা মানে হল প্রতিটা z_i-কে কোনো $re^{i\theta}$ দিয়ে গুণ করা (যেখানে $r > 0$-টা হল dilation-এর পরিমাণ, আর $\theta \in \mathbb{R}$ হল কতটা ঘোরাচ্ছি)। এই গুণটা তো উপরনীচ দুদিকেই হচ্ছে, তাই কাটাকাটি হয়ে যাচ্ছে।

> For dilation (by factor $r > 0$) and rotation (by angle $\theta \in \mathbb{R}$), each z_i is multiplied by $re^{i\theta}$. So the ratio remains the same.

পরে রইল খালি inversion. এখানেই প্রচুর কেস এসে যাবে। কারণ ∞ এসে গেলেই cross-ratio-র সংজ্ঞাটা একটু অন্যরকম হয়ে যায়। তবে এদের মধ্যে প্রধান কেসটা হল যেখানে কোনো ∞-র গল্প নেই, মানে--

> Case 1: All z_i's are nonzero and finite:
>
> Here
>
> $$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}\right) &= \frac{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_4}\right)}{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}\right)\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}\right)} \\ &= \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)} \\ &\qquad \text{multiplying numerator and denominator by } z_1 z_2 z_3 z_4. \\ &= \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} \\ &= (z_1, z_2, z_3, z_4),\end{aligned}$$
>
> as required.

নমুনা হিসেবে আরেকটা কেস দেখাচ্ছি--

Case 2: $z_1 = \infty$ and all other z_i's nonzero: Here

$$\left(0, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}\right) = \frac{\left(0 - \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_4}\right)}{\left(0 - \frac{1}{z_4}\right)\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}\right)}$$

$$= \frac{(z_4 - z_3)}{(z_2 - z_3)}$$

multiplying numerator and denominator by $z_2z_3z_4$.

$$= (\infty, z_2, z_3, z_4),$$

as required.

আরো নানারকম কেস সম্ভব, কোনো একটা z_i হয়তো ∞ আবার একই সঙ্গে কোনো একটা $z_j = 0$, এইসব। আমরা এই বইতে cross-ratio কোথাও ব্যবহার করব না। খালি একটু স্বাদ দেবার জন্য একটা অংক দিচ্ছি।

Example 30: Find a Möbius transform $M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ such that $M(1) = 2 + 3i$, $M(0) = \infty$ and $M(i) = -i$.

SOLUTION: এখানে আমরা cross-ratio ব্যবহার করে প্রথমে এরকম একটা Möbius transform-এর চেহারা আন্দাজ করে নেব। তারপর সরাসরি দেখাব যে সেই Möbius transform-টা আমাদের শর্ত তিনটে পালন করে।

We know that such a Möbius transform $M(z)$ exists.

Since cross-ratio is an invariant for a Möbius transform, we must have, for any $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 0, i\}$,

$$(M(z), M(1), M(0), M(i)) = (z, 1, 0, i),$$

or

$$(M(z), 2 + 3i, \infty, -i) = (z, 1, 0, i),$$

or

$$\frac{(M(z) - (2 + 3i))}{M(z) - (-i)} = \frac{(z - 1)(0 - i)}{(z - i)(0 - 1)},$$

since $z \neq \infty$.

খানিকক্ষণ দলাইমলাই করলে পাবে--

So $M(z) = \frac{(1+3i)z+(4-2i)}{(1-i)z} = M_A(z)$ where $A = \begin{bmatrix} 1+3i & 4-2i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$.

■

একই কায়দায় নীচের অংকটাও করতে পারবে।

Exercise 18: Find a Möbius transform $M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ that takes $-1, 0, 1$ to $1 + i, 2 + 3i, -i$ respectively. ■

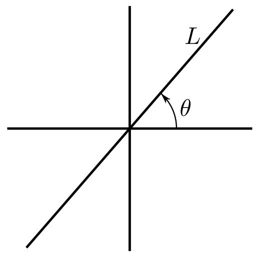


Fig 43

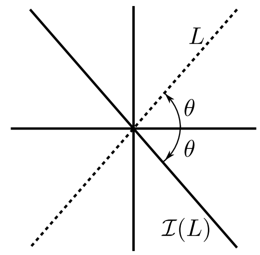


Fig 44

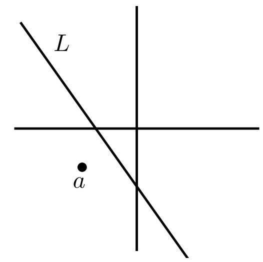


Fig 45

DAY 13
Möbius transform (part 3)

13.1 Circle আর line

Möbius transform-দের যতরকম অদ্ভুত ধর্ম আছে, তার মধ্যে অন্যতম হল এইটা--

> যদি $\mathbb{C}$-এর মধ্যে কোনো circle বা straight line নাও, এবং তার উপরে যেকোনো Möbius transform লাগাও, তবে সেটা ফের একটা circle বা straight line-এই পরিণত হবে। একটা circle অবশ্য straight line হয়ে যেতে পারে, বা একটা straight line কখনো circle হয়ে যেতে পারে, কিন্তু ব্যাপারটা circle আর straight line-এর বাইরে কখনোই যাবে না!

বিপরীতপক্ষে--

> যদি যে কোনো circle বা straight line দেওয়া থাকে $\mathbb{C}_\infty$-র মধ্যে (দুটোই circle, বা দুটোই straight line, বা একটা circle আর অন্যটা straight line), তবে এমন একটা Möbius transform পাবে, যেটা একটাকে অন্যটাতে নিয়ে ফেলে।

এই ধর্মটা খুব কাজে লাগে। আমরা এখানে এগুলো প্রমাণ করব, এবং তার জন্য কাজ করব সেই চারটে বিশেষ Möbius transform নিয়ে, rotation, dilation, inversion আর translation. প্রমাণটা একটু লম্বা হবে। আমরা ব্যাপারটাকে বিভিন্ন কেসের জন্য আলাদা করে প্রমাণ করব। Circle বা straight line, খাতার পাতায় এগুলো আমাদের পরিচিত জিনিস। কিন্তু $\mathbb{C}_\infty$ একেবারে খাতার পাতা তো নয়, এর মধ্যে আবার ∞ আছে। তাই $\mathbb{C}_\infty$-র মধ্যে circle আর straight line কী জিনিস সেটা একটু গুছিয়ে লিখে নিই।

> DEFINITION: **Circle and straight line in $\mathbb{C}_\infty$**
>
> By a **circle** in $\mathbb{C}_\infty$ we mean a circle in $\mathbb{C}$.
> By a **straight line** in $\mathbb{C}_\infty$ we mean $L \cup \{\infty\}$ where L is a straight line in $\mathbb{C}$.

সহজ বাংলায়, $\mathbb{C}_\infty$-র মধ্যে circle মানে নতুন কিছুই নয়, আমরা যাকে এতদিন circle বলে জেনে এসেছি, তাই-ই। কিন্তু straight line-এর বেলায় একটা নতুনত্ব আছে, আমরা যাকে এতদিন straight line বলে জেনে এসেছি, তার সঙ্গে ∞ জুড়ে দেওয়া হয়েছে। তার কারণ আর কিছুই নয়, যেকোনো straight line-ই অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হয়, সেই ব্যাপারটা থেকেই এই ∞-র আবির্ভাব।

এইবার তবে গুছিয়ে লিখে প্রমাণ শুরু করা যাক।

THEOREM

Let S be any circle or straight line in $\mathbb{C}_\infty$. Let $M(z)$ be a Möbius transform. Then $M(S)$ is again a circle or straight line in $\mathbb{C}_\infty$.

Proof:

> We know that any Möbius transform $M(z)$ is a composition of translation, rotation, dilation and inversion.
>
> It is easy to see that translation, rotation and dilation sends circles or lines to circles or lines.

পরিশ্রমটা করতে হবে inversion-এর বেলায়।

> So enough to show that inversion also does the same. Inversion means $\mathcal{I} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ where
>
> $$\mathcal{I}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{if } z = 0 \\ 0 & \text{if } z = \infty \end{cases}.$$

এবার কেসে কেসে ভেঙে এগোব।

> Case 1: Line passing through the origin:
>
> Such a line is given by $L = \{re^{i\theta} \ : \ r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ for some fixed $\theta \in \mathbb{R}$.

এটা কী করে হল বুঝলে তো? লাইনটা কত কোণে হেলে আছে সেটাকে θ বলেছি (Fig 43)। সেই দিক বরাবর যাবতীয় complex সংখ্যার চেহারা হল $re^{i\theta}$. এখানে r কিন্তু ≤ 0-ও হতে পারে, কারণ লাইনটা দু দিকেই অসীম। আর যেহেতু আমরা $\mathbb{C}_\infty$ নিয়ে কাজ করছি, তাই বাড়তি ∞-টা জুড়ে দিতে হয়েছে।
এবার আমরা এর উপরে $\mathcal{I}$ লাগাব। মনে রেখো $\mathcal{I}$-এর সংজ্ঞায় তিনটে অংশ-- এক, z যখন $finite, nonzero$, দুই, $z = 0$ আর তিন, $z = \infty$. আমরা L-কেও সেই অনুযায়ী লিখি--

> We can write
>
> $$L = \{re^{i\theta} \ : \ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{0\} \cup \{\infty\}.$$
>
> So
>
> $$\mathcal{I}(L) = \left\{ \frac{e^{-i\theta}}{r} \ : \ r \neq 0 \right\} \cup \{\infty\} \cup \{0\},$$
>
> which is again a line passing through the origin.

আমরা $\mathcal{I}(L)$-কে Fig 44-এ দেখিয়েছি। লক্ষ করো, inversion-এর ফলে লাইনটা কেমন real axis বরাবর প্রতিফলিত হয়ে গেল।
এইবার দেখি যেসব লাইন origin দিয়ে যায় না তারা inversion-এর ফলে কোথায় যায়।

> Case 2: Line not passing through the origin: Let L be such a line.

এরকম লাইনকে অংকের ভাষায় লিখতে হবে। একটা কায়দা হল $ax + by = c$ আকারে লেখা। তাতে অংকটা হবে বটে, কিন্তু অনেক খাটতে হবে। তার চেয়ে এখানে একটা কৌশল করব, তাতে অনেক সহজে হয়ে যাবে। একটা লাইনকে প্রকাশ করার এই কৌশলটা হয়তো তুমি আগে দ্যাখো নি, ভালো করে বুঝে বুঝে পড়। আমরা জানি origin-টা L-এর উপরে নেই, তার মানে কোনো এক পাশে আছে। L-এর অন্য পাশে origin-এর প্রতিফলনটা নাও (Fig 45)। লক্ষ করো, L-এর প্রতিটা বিন্দুই হল 0 আর a থেকে সমদূরবর্তী। এইটাকে কাজে লাগিয়ে আমরা L-কে অংকের ভাষায় প্রকাশ করব--

> Let $a \in \mathbb{C}$ be the reflection of the origin along L.
> Then $L = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = |z - a|\} \cup \{\infty\}$.

খালি ∞-টাকে আলাদা করে হিসেবে নিতে হয়েছে, কারণ ∞ থেকে দূরত্ব মাপা যায় না।
এবার inversion-এর ফলে বিভিন্ন $z \in L$ কোথায় যায়, তার হিসেব নেব।

> We have $\mathcal{I}(\infty) = \{0\}$.
> For any finite $z \in L$ we have $z \neq 0$, and so $\mathcal{I}(z) = \frac{1}{z} = w \neq 0$, say.
> So
>
> $$\begin{aligned} |z| = |z - a| &\iff w \neq 0 \ \& \ \left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} - a\right| \\ &\iff w \neq 0 \ \& \ 1 = |1 - aw| \\ &\iff w \neq 0 \ \& \ \left|\frac{1}{a}\right| = \left|w - \frac{1}{a}\right|. \end{aligned}$$
>
> So $\mathcal{I}(L) = \{w \in \mathbb{C} \ : \ \left|w - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}\}$, which is a circle with centre $\frac{1}{a}$ and $\frac{1}{|a|}$.
> Since $w = 0$ satisfies this equation, the circle passes through the origin.

এই গেল straight line-এর দুটো কেস। এবার circle-এর কেসগুলো শুরু করি--

> Case 3: Circle passing through origin: By case 2, any such circle is $\mathcal{I}(L)$ for some straight line not passing through the origin.

এই কথাটাই একটু আগে বলছিলাম। এবার দ্যাখো এটা কীভাবে কাজে লাগবে। আমরা জানি দুবার inversion লাগালে ফের গোড়ার জায়গাতেই ফিরে যেতে হয়--

> We know that $\mathcal{I} \circ \mathcal{I} =$ identity.
> So $\mathcal{I}(\mathcal{I}(L)) = L$.
> Hence the image is a straight line not passing through the origin.

পড়ে আছে খালি একটাই কেস--

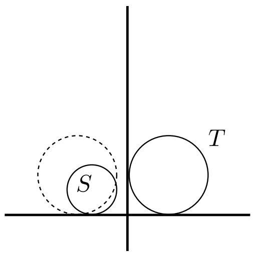


Fig 46

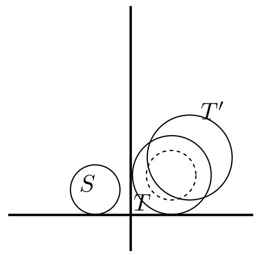


Fig 47

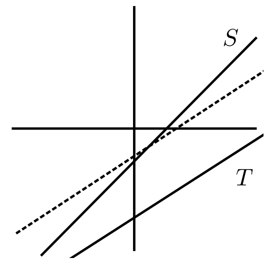


Fig 48

> Case 4: Circle not passing through origin:
>
> Such a circle has equation $|z - a| = r$, where $a \in \mathbb{C}$ and $r > 0$ with $|a| \neq r$.

এইবার একটু কৌশল করলে সুবিধা হবে।

> This can be written as $|z - a|^2 = r^2$, or $(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = r^2$, or
>
> $$|z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2 - r^2 = 0.$$

এবার আমরা $\mathcal{I}(z)$ বার করব। এখানে z-টা 0 বা ∞ হবে না, কারণ কোনো circle কখনো অসীম অব্ধি হাত বাড়ায় না, আর আমাদের circle-টা origin দিয়ে যায় না। সুতরাং $\mathcal{I}(z) = \frac{1}{z}$ হবে।

> Putting $w = \mathcal{I}(z) = \frac{1}{z}$ we get
>
> $$\frac{1}{|w|^2} - \frac{a}{\overline{w}} - \frac{\overline{a}}{w} + |a|^2 - r^2 = 0,$$
>
> or, $$1 - \frac{a|w|^2}{\overline{w}} - \frac{\overline{a}|w|^2}{w} + (|a|^2 - r^2)|w|^2 = 0,$$
>
> or, $$1 - aw - \overline{aw} + (|a|^2 - r^2)|w|^2 = 0,$$
>
> or, $$R - \overline{a}'w - R\overline{a}'\overline{w} + |w|^2 = 0,$$
>
> where $R = \frac{1}{|a|^2 - r^2}$ and $a' = \frac{a}{|a|^2 - r^2}$.

এখানে আমরা $|a|^2 - r^2$ দিয়ে ভাগ করতে পারলাম, কারণ circle-টা origin দিয়ে যায় না, তাই $|a|^2 - r^2 \neq 0$. সেটা বলে দেওয়া ভালো--

> Since the circle does not pass through the origin, hence $|a|^2 - r^2 \neq 0$.
>
> Now
>
> $$R - \overline{a}'w - R\overline{a}'\overline{w} + |w|^2 = (w - a')(\overline{w} - \overline{a}') + R - |a'|^2 = |w - a'|^2 + R - |a'|^2.$$
>
> Here
>
> $$R - |a'|^2 = \frac{1}{|a|^2 - r^2} - \frac{|a|^2}{(|a|^2 - r^2)^2} = \frac{|a|^2 - r^2 - |a|^2}{(|a|^2 - r^2)^2} = -\frac{r^2}{(|a|^2 - r^2)^2}.$$

> So we have
> $$|w-a'|^2 = \frac{r^2}{(|a|^2-r^2)^2}.$$
> Since the RHS is >0, hence this is again a circle. Also, since $|a|^2 \neq r^2$,
> $$|a'|^2 = \frac{|a|^2}{(|a|^2-r^2)^2} \neq \frac{r^2}{(|a|^2-r^2)^2}.$$
> So this circle does not pass through the origin.

[Q.E.D]

পুরো প্রমাণটা বেশ জটিল মনে হলেও, এর মূল নির্যাসটা মনে রাখা কিন্তু খুবই সহজ। খালি দুটো জিনিস মাথায় রাখো--

- এক, inversion করলে 0 যায় ∞-তে, আর ∞ যায় 0-তে।
- দুই, একটা circle-এ কখনওই ∞ থাকে না, কিন্তু একটা straight line-এর সব সময়েই থাকে।

এবার ধরো বললাম, একটা circle passing through origin-এর উপরে inversion লাগালে কী পাবে। চট্ করে এইভাবে চিন্তা করো--

> origin আছে, সুতরাং inversion-এর পরে ∞ থাকবে, অতএব straight line হতে বাধ্য। ওদিকে circle-এর ∞ নেই, তাই inversion-এর পর 0 থাকবে না, মানে straight line-টা origin দিয়ে যাবে না।

একইভাবে যদি শুরু করতাম straight line not through origin নিয়ে, তবে চিন্তা করতে এইভাবে--

> origin নেই, তাই inversion-এর পর ∞ থাকবে না, মানে circle পাব। এদিকে যে কোনো straight line-এই ∞ থাকে, সুতরাং inversion-এর পরে 0 থাকবে, মানে circle passing through origin.

তাহলে দেখা গেল যে, যেকোনো circle বা straight line-এর যেকোনো Möbius transform লাগালে ফের একটা circle বা straight line পাওয়া যায়। এবার এর উল্টো দিকটা দেখি। ধরো যেকোনো দুটো circle বা যেকোনো দুটো straight line, বা একটা circle আর একটা straight line দিয়ে দিলাম। এবার জানতে চাই এমন কোনো Möbius transform আছে কিনা, যেটা প্রথমটাকে দ্বিতীয়টাতে নিয়ে যেতে পারে। উত্তর হল--হ্যাঁ, এরকম Möbius transform সবসময়ে পাওয়া যাবেই! নীচের theorem-টার বক্তব্য সেটাই।

THEOREM

Let S and T be any two circles or straight lines in $\mathbb{C}$. Then there is a Möbius transform M that takes S to T.

Proof: এখানেও আমরা কাজ করব সেই চার ধরণের Möbius transform নিয়ে--

> We know that translation, dilation, rotation and inversion are Möbius transforms, and all their compositions are Möbius transforms. So it is enough to show that S may be transformed to T by using a composition of these four transforms.

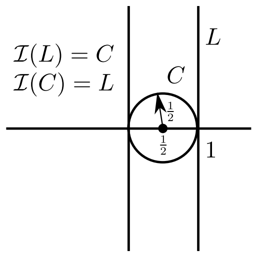


Fig 49



Fig 50

∎

যদি S আর T দুজনেই circle হয়, তবে কাজটা সহজ। Fig 46 দেখে নাও। প্রথমে S-কে dilation দিয়ে T-এর সমান radius-এর করে নেব। এর ফলে ছবির ড্যাশ্ ড্যাশ্ circle-টা পাবে। এবার সেই circle-টার centre-টাকে translation করে T-এর centre-এ এনে উপস্থিত করো। ব্যস্!

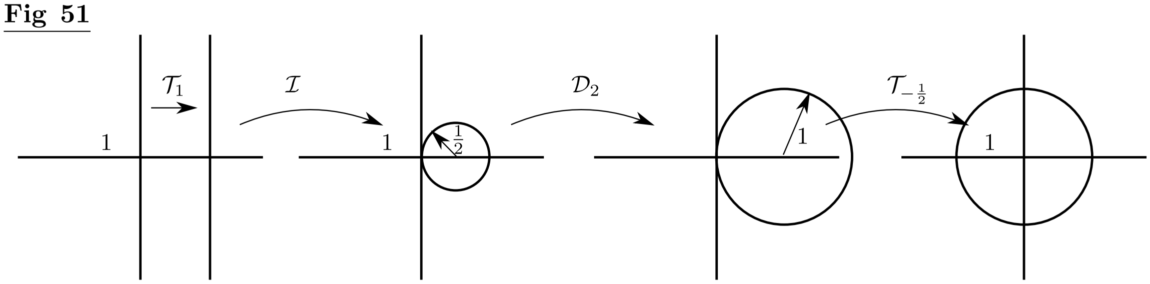
> Case 1: If both S and T are circles, then we may dilate S until it has the same radius as T. Then we can translate its centre to that of T.

এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান। Dilation কিন্তু origin-কে কেন্দ্র করে করে হয়। সুতরাং যদি তুমি একটা circle-এর উপরে $\mathcal{D}_2$ লাগাও, তবে তার radius যেমন দ্বিগুণ হয়ে যাবে, তেমনি origin থেকে সেটা আবার দ্বিগুণ দূরেও সরে যাবে। সেই কারণে আমরা প্রথমে dilation এবং তার পরে translation করেছিলাম। উল্টোটা করলে কাজ নাও হতে পারে। সেটা দেখিয়েছি Fig 47-এ। এখানে প্রথমে translation লাগিয়ে আমরা S-এর centre-কে T-এর centre-এ এনে ফেলেছি (ড্যাশ্ ড্যাশ্ circle-টা)। তারপর সেটাকে dilation দিয়ে radius-টাকে T-এর radius-এর সমান করার চেষ্টা করেছি। কিন্তু তাতে centre-টা গেছে সরে! ফলে আমরা T-এর বদলে T'-এ হাজির হয়েছি।
এবার বলি S আর T দুজনেই straight line হলে কী করব। Fig 48 দেখে নাও। প্রথমে S-কে ঘুরিয়ে T-এর parallel করে নেব (যদি S আর T এমনিতেই parallel হয়, তবে ঘোরানোটার দরকার হবে না, মানে 0 পরিমাণ ঘোরাব)। তারপর translation করে T-র উপর এনে ফেলব।

> Case 2: If both S and T are straight lines, then we may rotate S until it is parallel to T. Then we may translate it to coincide with T.

এখানেও মনে রেখো যে, rotation-টা হচ্ছে origin-কে কেন্দ্র করে, তাই আগে translation করে পরে rotation করতে গেলে সমস্যা হতে পারে।
এইবার দেখব S আর T-এর মধ্যে একজন circle অন্যজন straight line হলে কী করতে হবে। এতক্ষণ যা যা করেছি, তাতে inversion কাজে লাগে নি। এবার লাগবে। আমরা আগের theorem-এর প্রমাণটা করার সময়েই শিখেছিলাম যে, inversion দিয়ে circle-কে straight line (এবং straight line-কে circle) বানানো যায়--

Fig 51



> যদি কোনো circle passing through origin নাও, তবে inversion লাগালে সেটা হয়ে যাবে straight line not through origin. এবং আরেকবার inversion লাগালে ফের circle-এ ফিরে যাবে।

এই ব্যাপারটা ব্যবহার করলে এই theorem-টার প্রমাণ হয়েই গেল--

- S যদি circle আর T একটা straight line হয়, তবে প্রথমে S-কে translation দিয়ে এমন অবস্থানে নিয়ে এসো, যাতে ওটা origin দিয়ে যায়, তারপর inversion লাগিয়ে একটা straight line বানিয়ে নাও। এবার case 2-র মত করে straight line-টাকে T-তে নিয়ে যাও।

- আবার যদি S হয় straight line, আর T হয় circle, তবে প্রথমে translation লাগিয়ে S-কে origin-এর থেকে খানিকটা দূরে কোথাও সরিয়ে দাও। তারপর inversion লাগালেই একটা circle পেয়ে যাবে, যেটাকে case 1-এর মত করে T-তে নিয়ে ফেলতে পারবে।

> Case 3: If S is a circle and T is a straight line:
>
> We know that inversion maps between a straight line not passing through the origin to a circle passing through the origin.
>
> Now S may be first transformed to a circle passing through origin using case 1. This is circle is mapped to a line by inversion. The line may be transformed to L as in case 2.
>
> Case 4: If S is a straight line and T is a circle:
>
> The reverse process of case 3 works.

[Q.E.D]

এতক্ষণ আমরা অনেক কিছু প্রমাণ করলাম। এবার এগুলোই আমরা হাতেকলমে করে দেখব।

13.2 ঘেঁটে ঘন্ট করা

অনেক সময়ে $\mathbb{C}_\infty$-কে ঘেঁটে ঘন্ট করার দরকার পড়ে, মানে $\mathbb{C}_\infty$-র একটা অঞ্চলকে আরেকটা অঞ্চলে নিয়ে ফেলতে হয়। এর নানা অদ্ভুত প্রয়োগ আছে। একটা প্রয়োগ হল complex function-দের integrate করা। আরেকটা বিস্ময়কর প্রয়োগ হল এরোপ্লেনের ডানার আকার কীরকম হলে হাওয়া ভালো করে কাটবে সেটা বার করা! এ বইতে অবশ্য সেই সব প্রয়োগের আলোচনা করতে পারব না। খালি এইটুকু বলব যে, যদি অঞ্চলগুলোর boundary হয় circle বা straight line, তবে কাজটা Möbius transform-দের ব্যবহার করে করা যায়। এবার সে আলোচনাটাই করব।

একটা straight line-কে আরেকটা straight line-এ, বা একটা circle-কে আরেকটা circle-এ পরিণত করা শক্ত কিছু নয়। মাথা গুলিয়ে যায় circle থেকে straight line বানাতে (বা straight line থেকে circle বানাতে)। আমরা যখন দেখাচ্ছিলাম যে, straight line not through origin-এর উপর inversion লাগালে circle passing through origin পাওয়া যায়, তখন আমরা দেখিয়েছিলাম যে L-কে যদি $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = |z-a|\} \cup \{\infty\}$ আকারে লেখা যায়, তবে

Fig 52

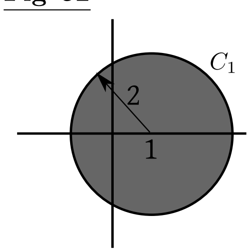


Fig 53

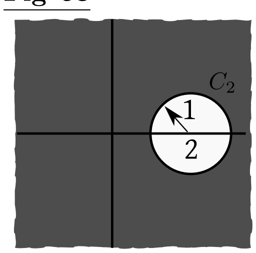


Fig 54

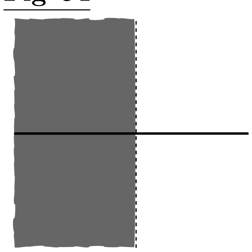
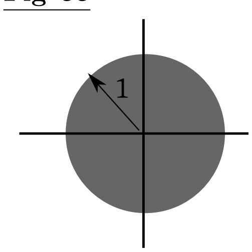


Fig 55



$\mathcal{I}(L)$ হয় এই circle-টা, যার equation হল $\left|z-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{|a|}$. এটার একটা special case মনে রাখলে আমাদের সুবিধা হবে। সেটা হল যখন $a=2$. এক্ষেত্রে আমরা এই জিনিসটা পাব--

> ধরো L হল $x=1$ দিয়ে vertical লাইনটা (তার সঙ্গে ∞ তো আছেই)। আর ধরো C হল সেই circle-টা যার centre আর radius দুটোই হল $\frac{1}{2}$. বোঝার জন্য Fig 49 দেখে নাও। তবে inversion লাগালে L পরিণত হবে C-তে, আর C পরিণত হবে L-এ।

এবার যখনই কোনো straight line-কে circle-এ পরিণত করতে হবে, প্রথমে straight line-টাকে L-এ নিয়ে আসবে, তারপর inversion লাগালেই C পেয়ে যাবে, এবার C-টাকে তোমার প্রয়োজনীয় circle-এ নিয়ে ফেলতে আর কতক্ষণ? কিছু উদাহরণ দেখলেই কায়দাটা বুঝবে।

Example 31: Give a Möbius transform that maps the imaginary axis to the unit circle centred at origin.

SOLUTION: কী করতে হবে সেটা Fig 50-এ দেখে নাও। এখানে যদিও প্রশ্নে imaginary axis বলেছে, কিন্তু মনে মনে ওর সঙ্গে ∞-কেও ঢুকিয়ে নিও। সমাধানের ধাপগুলো পড়ার সময়ে Fig 51-এর দিকে চোখ রাখলে সুবিধা হবে। এখানে straight line থেকে circle-এ যেতে হবে। তাই প্রথমে straight line-টাকে L-এ নিয়ে যাব। এক্ষেত্রে ডানদিকে এক ঘর সরালেই চলবে, তার মানে $\mathcal{T}_1$. এবার আমরা inversion লাগাব। ফলে পাব C. এর radius হল $\frac{1}{2}$, আমাদের পৌঁছতে হবে একটা unit circle-এ। তাই $\mathcal{D}_2$ লাগিয়ে সবকিছুকে দ্বিগুণ বড় করে নিলাম। কিন্তু dilation যেহেতু origin-কে কেন্দ্র করে হয়, তাই centre-টাও এর ফলে origin থেকে দ্বিগুণ দূরে সরে গেল। আগে centre-টা ছিল $\frac{1}{2}$, এখন হয়ে গেল 1. সেটাকে origin-এ ফিরিয়ে আনার জন্য $\mathcal{T}_{-1}$ লাগালেই হবে। সুতরাং সব মিলিয়ে হল

$$\mathcal{T}_{-1}\circ\mathcal{D}_2\circ\mathcal{I}\circ\mathcal{T}_1=M_A,$$

যেখানে

$$A=\left[\begin{array}{cc}1&-1\\0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}2&0\\0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}0&1\\1&0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1&1\\0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}-1&1\\1&1\end{array}\right].$$

এইটা কী করে পেলাম? এর জন্য মনে রাখতে হয়েছে $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$ ইত্যাদিদের matrix-গুলো। সেগুলো আমরা Möbius transform-এর আলোচনার প্রথম দিনেই বলেছিলাম। আমরা আরো জানি যে, কিছু Möbius transform-এর composition নেওয়া মানে তাদের matrix-গুলোকে পরপর গুণ করে দেওয়া। সেই কাজটাই করেছি এখানে। সব মিলিয়ে দাঁড়ালো--

$$M_A(z)=\begin{cases}\frac{-z+1}{z+1} & \text{if } z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}\\ \infty & \text{if } z=-1\\ -1 & \text{if } z=\infty\end{cases}.$$

■

এবার তোমার নিজে নিজে করার জন্য একটা একইরকম অংক দিই।

Exercise 19: Real axis-টাকে সেই circle-এ নিতে হবে, যার equation হল $|z-2|=1$. কাজটা কী করে একটা Möbius transform দিয়ে করবে?

HINT: এখানেও মনে মনে real axis-এর সঙ্গে ∞-কেও ধরে নিও।

■

Inversion-এর একটা গুণ তো দেখলে, circle-কে straight line, আর straight line-কে circle-এ পরিণত করতে পারে। এবার আরেকটা গুণ দেখব, যেটা $\mathbb{C}_\infty$-কে ঘেঁটে ঘন্ট করার কাজে খুব সাহায্য করে।

Example 32: Origin-কে centre করে unit circle-টা নাও। এটা পুরো $\mathbb{C}_\infty$-কে তিনভাগে ভাগ করেছে--

- এক, সেই সব বিন্দু z যারা circle-টার ভিতরে আছে, মানে যাদের জন্য $|z| < 1$,
- দুই, সেই সব বিন্দু যারা পরিধির উপরে আছে, মানে $|z| = 1$,
- তিন, সেই সব বিন্দু যারা circle-টার বাইরে আছে, মানে $|z| > 1$ এবং ∞.

তোমাকে বার করতে হবে inversion লাগালে এই তিন ধরণের বিন্দু কে কোথায় যায়।
SOLUTION: লক্ষ করো, $|z| = 1$ হলে $\left|\frac{1}{z}\right| = 1$ হয়। তাই পরিধিটা পরিধিতেই থাকে। কিন্তু $|z| < 1$ হলে inversion-এর পরে $|z| > 1$ হয়ে যাবে (বা 0 থেকে ∞ হয়ে যাবে)। তাই circle-এর ভিতরের অঞ্চলটা circle-এর বাইরের অঞ্চলে পরিণত হবে। একই যুক্তিতে বাইরের অঞ্চলটা পরিণত হবে ভিতরের অঞ্চলে। ■

Inversion-এর এই ধর্মটা ব্যবহার করে যেকোনো circle-এর ভিতরটাকে বাইরে, আর বাইরেটাকে ভিতরে এনে ফেলা যায়।

> ঘর কৈল বাহির, বাহির কৈল ঘর।
>
> --সম্ভবতঃ চণ্ডীদাস

এবার এরকম একটা উদাহরণ দেখি।

Example 33: Give a Möbius transform that maps the inside of $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1| = 2\}$ to the outside of $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-2| = 1\}$.
SOLUTION: এখানে দুটো circle নিয়ে কাজ হচ্ছে (Fig 52 আর Fig 53)। এক, $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1| = 2\}$ আর দুই, $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-2| = 1\}$. আমাদের কাজ হল C_1-এর ভিতরটাকে C_2-র বাইরে নিয়ে ফেলা। আমরা জানি inversion ব্যবহার করলে একটা বিশেষ circle-এর ভিতর-টা বাইরে, আর বাইরে-টা ভিতরে চলে যায়। সেই বিশেষ circle-টার centre হল origin-এ, আর radius হল 1. এটার নাম দেওয়া যাক C.
তাহলে এই অংকে আমরা প্রথমে C_1-কে C-তে নিয়ে যাব, তারপর inversion লাগিয়ে ভিতর-বাইরে ওল্টাব। তারপর C-কে C_2-তে নিয়ে এলেই কাজ শেষ।
প্রথম ধাপটা (মানে C_1-কে C-তে আনা) করা যাবে এইভাবে--

$$\mathcal{T}_{-\frac{1}{2}} \circ \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}.$$

দ্বিতীয় ধাপটা স্রেফ একটা inversion.
তৃতীয় ধাপটা (মানে C থেকে C_2-তে যাওয়া) করব $\mathcal{T}_2$ দিয়ে। সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়াচ্ছে--

$$\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{-\frac{1}{2}} \circ \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} = M_A,$$

যেখানে

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

বড় করে লিখে দেওয়া ভালো--

$$M_A(z) = \begin{cases} \frac{2z}{z-1} & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ \infty & \text{if } z = 1 \\ 2 & \text{if } z = \infty \end{cases}.$$

যদি তোমার এতগুলো matrix-কে গুণ করতে আপত্তি থাকে, তবে আরেকটা কায়দাতেও করতে পারো। আমরা এটা পেয়েছিলাম--

$$\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{-\frac{1}{2}} \circ \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}.$$

এখান থেকে matrix বার না করে, প্রথমে z নিয়ে শুরু করো এবং পরপর এই function-গুলো লাগাতে থাকো (ডানদিক থেকে বাঁদিকে)--

$$z \xmapsto{\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}} \frac{z}{2} \xmapsto{\mathcal{T}_{-\frac{1}{2}}} \frac{z}{2} - \frac{1}{2} = \frac{z-1}{2} \xmapsto{\mathcal{I}} \frac{2}{z-1} \xmapsto{\mathcal{T}_2} \frac{2}{z-1} + 2 = \frac{2z}{z-1}.$$

এতক্ষণ আমরা শূন্য-দিয়ে-ভাগ বা ∞ ইত্যাদির তোয়াক্কা রাখছিলাম না। এবার এই $\frac{2z}{z-1}$ চেহারাটা দেখলেই পুরো রূপটা বুঝে যাবে--

$$M_A(z) = \begin{cases} \frac{2z}{z-1} & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ \infty & \text{if } z = 1 \\ 2 & \text{if } z = \infty \end{cases} .$$

■

Exercise 20: Give a Möbius transform that maps the outside of $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1| = 2\}$ to the inside of $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-2| = 2\}$. ■

এবার একইরকম আরেকটা অংক, কিন্তু স্বাদটা সামান্য অন্যরকম।

Example 34: Give a Möbius transform that maps $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z) < 0\}$ to $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$.

SOLUTION: Fig 54 আর Fig 55-এ দুটো অঞ্চলের boundary দ্যাখো। প্রথমটার boundary হল imaginary axis আর দ্বিতীয়টার boundary হল origin-কে centre করে আঁকা unit circle-টা। আমরা একটু আগেই একটা অংকে imaginary axis-টাকে unit circle-কে আনতে শিখেছি। সেই Möbius transform-টা ছিল $M_A(z)$, যেখানে

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

এখন প্রশ্ন হল এর ফলে imaginary axis-এর বাঁদিকটা কোথায় গিয়ে পড়বে, unit circle-টার ভিতরে, নাকি বাইরে? তার জন্য imaginary axis-এর বাঁদিকের যেকোনো একটা বিন্দু নিয়ে পরীক্ষা করলেই হবে। ধরো $z = -1$ নিলাম। তবে $M_A(-1) = \infty$ আসছে, যেটা unit circle-টার বাইরে। তার মানে আমাদেরকে আরেকবার inversion করতে হবে, অর্থাৎ আমাদের দরকার

$$\mathcal{I} \circ M_A = \begin{cases} \frac{z+1}{-z+1} & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ \infty & \text{if } z = 1 \\ -1 & \text{if } z = \infty \end{cases} .$$

এটা পেলাম $M_A(z)$-কে "উল্টে"। তাই $\frac{-z+1}{z+1}$-কে $\frac{z+1}{-z+1}$ করে দিয়েছি। এবার নীচের-তলায়-শূন্য আর ∞-র কেস দুটো সেই অনুযায়ী লিখে দিয়েছি। ■

Exercise 21: Give a Möbius transform $M(z)$ that maps $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)\}$ to the region $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\}$. ■

Answers

1. $0, 1, -1, 2i$. **2.** (i) $x^3 - 3xy^2$ এবং $3x^2y - y^3$. (ii) $e^x \cos y$ এবং $e^x \sin y$. (iii) $\frac{x}{x^2+y^2}$ এবং $-\frac{y}{x^2+y^2}$. **6.** হ্যাঁ! **9.** $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$. **10.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. **11.** $\left(\frac{3}{14}, \frac{1}{7}, \frac{13}{14}\right)$. **12.** একটা vertical circle, যেটা দুই মেরু দিয়ে যায়। অবশ্যই এর থেকে north pole-টা বাদ থাকবে। **13.** না, parallel আর হয় কী করে? দুজনেই তো complex plane-এ অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত, তাই Riemann sphere-এ দুজনেই north pole-এর ঘাড়ে গিয়ে পড়তে বাধ্য। **14.** Unit circle-এর ভিতরটা। **15.** $M_A(z) = \begin{cases} \frac{z+3}{2z+4} & \text{if } z \in \mathbb{C}, \quad z \neq -2 \\ \infty & \text{if } z = -2 \\ \frac{1}{2} & \text{if } z = \infty \end{cases}$

16. (i) $a=b=d=0, c=1$. (ii) $a=1, b=4, c=0, d=1$. (iii) এটা Möbius transform নয়। সাবধান, এটা কিন্তু $1+z$ নয়, কারণ $z=1$-এ এটা undefined. (iv) $a=0, b=1, c=1, d=1$. (v) এটা Möbius transform নয়। উপর নীচ পুরো কাটাকাটি হয়ে সব z চলে যাচ্ছে, অর্থাৎ একে $\frac{az+b}{cz+d}$ আকারে লিখলে $ad=bc$ হয়ে যাচ্ছে।

17. $\mathcal{T}_t$ হল বলটাকে t পরিমাণ horizontal দিকে সরানো। $\mathcal{R}_\theta$ হল বলটাকে vertical axis-কে ঘিরে θ কোণে ঘোরানো। Inversion-এর জন্য বলটার পেটের মধ্যে মনে মনে একটা ডাণ্ডা ঢুকিয়ে দাও, একেবারে কেন্দ্র দিয়ে real axis-এর সঙ্গে parallel রেখে (Fig 33)। সেই ডাণ্ডাটাকে axis করে π পরিমাণ (মানে $180°$) ঘোরাতে হবে।

18. $M_A(z)$, যেখানে $A=\begin{bmatrix} 2+i & -(2+3i) \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. **19.** M_A, যেখানে $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

20. $$\mathcal{T}_2\circ\mathcal{D}_2\circ\mathcal{I}\circ\mathcal{T}_{-\frac{1}{2}}\circ\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{2z+2}{z-1} & \text{if } z\in\mathbb{C}\setminus\{1\} \\ \infty & \text{if } z=1 \\ 2 & \text{if } z=\infty \end{cases}.$$

21. $$M(z)=\begin{cases} \frac{e^{i\pi/4}z+1}{-e^{i\pi/4}z+1} & \text{if } z\in\mathbb{C}\setminus\{e^{-i\pi/4}\} \\ \infty & \text{if } z=e^{-i\pi/4} \\ -1 & \text{if } z=\infty \end{cases}.$$

Chapter III
Differentiation

DAY 14
Differentiation

এতক্ষণ পর্যন্ত আমরা complex সংখ্যাদের যেটুকু দেখেছি, তাদের মোটামুটি আচরণ real সংখ্যাদের মতই। সেই একইরকম যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগের নিয়ম, আর absolute value-র জায়গায় modulus কল্পনা করে নিলে limit, continuity ইত্যাদিও একেবারেই real analysis-এর মতই। এ যাবৎ খালি দুটো প্রধান পার্থক্য চোখে পড়েছে--

- এক, complex সংখ্যাদের মধ্যে ছোটো-বড় তুলনা করা যায় না, যেমন $2+3i < 3+2i$ বা $2+3i > 3+2i$ এরকম বলা যায় না।
- আর দুই, complex analysis-এ ∞ আর $-\infty$ বলে আলাদা কিছু হয় না, খালি একটাই ∞ হয়।

বাকি সব ব্যাপারে real analysis আর complex analysis-এর মধ্যে ভালোই সাদৃশ্য আছে। এবার আমরা সেই সাদৃশ্যটাকেই আরেক ধাপ এগিয়ে নিয়ে যাব, differentiation-এর সংজ্ঞা দিয়ে।
Real analysis-এ কী করে derivative-এর সংজ্ঞা দেওয়া হয়, মনে আছে নিশ্চয়ই। তারই অন্ধ অনুকরণে তৈরী নীচের সংজ্ঞাটা।

DEFINITION: Derivative

Let $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ be any function. Let $w\in\mathbb{C}$. We say that $f(z)$ is **differentiable** at $z=w$ if

$$\lim_{z\to w}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$$

exists finitely. The finite value of the limit is called the **derivative** of $f(z)$ at $z=w$, and is denoted by $f'(w)$.

Differentiation-এর যেসব ধর্ম আমাদের সুপরিচিত, প্রায় সবই এখানেও একইভাবে খাটবে।

$f(z)$	$f'(z)$	
constant	0	
z^n	nz^{n-1}	
e^z	e^z	
$\sin z$	$\cos z$	
$\cos z$	$-\sin z$	
$\tan z$	$\sec^2 z$	
$\text{Log } z$	$\frac{1}{z}$	$z\notin(-\infty,0]$.

এদের মধ্যে Log z-এর বেলায় দুটো জিনিস লক্ষ করো। এক, এখানে আমরা principal logarithm নিয়ে কাজ করছি, $\log z$ নিয়ে নয়, কারণ $\log z$ হল set-valued. আর দুই, এখানে একটা বাড়তি শর্ত দিয়েছি, $z \notin (-\infty, 0]$, অর্থাৎ খেয়াল রাখতে হবে z যেন negative real axis-এর উপর না থাকে বা 0 না হয়।
Differentiation-এর যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগের সূত্রগুলো আর chain rule, সেসবও একেবারেই হায়ার সেকণ্ডারীর মতই থাকবে। সুতরাং differentiation শেখার গোড়ার দিকে হায়ার সেকণ্ডারীতে যেসব অংকগুলো করতে, সেগুলো এখানেও একই কায়দায় করতে পারবে। একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 1: $2i + z^2 \sin(z^3)$-কে differentiate করো।

SOLUTION: উত্তর হল $0 + 2z\sin(z^3) + z^2\cos(z^3) \times 3z^2$. ■

হায়ার সেকণ্ডারীতে শিখেছিলে যে, differentiable হলে continuous-ও হয়, কিন্তু continuous হলেও differentiable নাও হতে পারে। সে কথাটা complex analysis-এও খাটে। সেই নিয়েই নীচের অংকটা।

Example 2: If a complex valued function f is differentiable at a point z_0, then prove that f is continuous at z_0. Is the converse true? Justify your answer.[3+2] **(2010.12b)**
SOLUTION: প্রমাণটা একেবারে real analysis-এর মতই। সেখানকার প্রমাণটা যদি তোমার মনে থাকে, তবে এটার জন্য কোনো বাড়তি পরিশ্রম লাগবে না। যদি নেহাত সেই প্রমাণটা ভুলে গিয়ে থাকো, সেই ভেবেই এখানে বিস্তারিতভাবে সমাধানটা দিচ্ছি।

> First part:
>
> Let $f'(z_0) = L \in \mathbb{C}$.
> Then, as $z \to z_0$, we have $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \to L$,

এবার আমরা সব কিছুকে বাঁদিকে নিয়ে আসব। এই ধাপটা ভালো করে লক্ষ করো, পরেও কাজে আসবে।

> or $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - L \to 0$.
> Hence
> $$\underbrace{\frac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{z - z_0}}_{h(z)} \to 0.$$
> Then $f(z) = h(z)(z - z_0) + L \cdot (z - z_0) + f(z_0)$.
> So, as $z \to z_0$, we have $f(z) \to 0 \times 0 + L \times 0 + f(z_0) = f(z_0)$, as required.

এবার সমাধানে দ্বিতীয় অংশ। এখানে দেখাব যে continuous হলেও differentiable নাও হতে পারে। তার জন্য একটা counterexample দেখানোই যথেষ্ট।

> Second part:
>
> No, continuity does not imply differentiability. A counterexample is $f(z) = |z|$ at $z = 0$.
> It is continuous, since if $z \to 0$ then $f(z) = |z| \to 0 = f(0)$. But it is not differentiable, since $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|}{z}$ does not exist in $\mathbb{C}$.

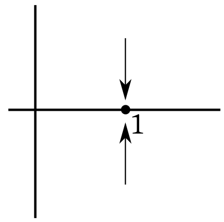


Fig 1

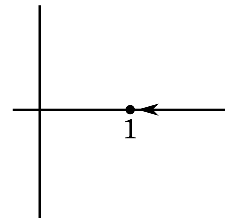


Fig 2

[[Because:

If z approaches 0 from the positive real axis, then $\frac{|z|}{z} \to 1$, but if $z \to 0$ along the negative real axis, then $\frac{|z|}{z} \to -1 \neq 1$.

]]

কোনো limit-কে যদি exist করে না দেখাতে হয়, তবে এই কায়দাটা বেশ কাজের। দুটো বিভিন্ন দিকে থেকে limit-টা নিলে আলাদা আলাদা value বেরোলেই বলা যায় যে, limit-টা exist করে না। কায়দাটা আমরা আগের অধ্যায়েই শিখেছি। ■

এই counterexample-টা একেবারেই real analysis থেকে নেওয়া। কিন্তু এরই মধ্যে একটা জায়গায় real analysis-এর সঙ্গে পার্থক্য আছে। Real analysis-এর বেলায় $|x|$-কে খালি $x = 0$-তে differentiate করা যেত না, অন্য কোথাও অসুবিধা ছিল না। একটু চেষ্টা করে দ্যাখো তো $|z|$-কে কোনো $z_0 \neq 0$-তে differentiate করা যায় কিনা! ধরো $z_0 = 1$-এ! সেটাই করতে বলেছে নীচের অংকে।

Exercise 1: দেখাও যে, $f(z) = |z|$ মোটেই $z = 1$-এ differentiable নয়।

HINT:

দেখতে হবে $\lim_{z\to 1} \frac{|z|-1}{z-1}$-টা সম্পর্কে কী বলা যায়। যদি imaginary axis-এর সঙ্গে parallel-ভাবে এগোই (Fig 1), মানে$z = 1 + iy$ নিই, আর $y \to 0$ হয়, তবে $z \to 1$ হবে। সেক্ষেত্রে $\frac{|z|-1}{z-1} = \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{iy} \to 0$ হচ্ছে। কেন 0 হচ্ছে, সেটা যদি বুঝতে না পরো তবে এইভাবে ভাবো--

$$\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{iy} = \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{iy} \times \frac{\sqrt{1+y^2}+1}{\sqrt{1+y^2}+1} = \frac{y}{i(\sqrt{1+y^2}+1)} \to \frac{0}{2i} = 0.$$

কিন্তু যদি real axis-এর সঙ্গে parallel-ভাবে এগোই (Fig 2), মানে $z = 1 + y$ নিই, যেখানে $y > 0$ এবং $y \to 0$, তবে $\frac{|z|-1}{z-1} = \frac{1+y-1}{y} \to 1$. যেহেতু দুদিক থেকে গেলে দুরকম limit এল, তাই বলতে পারি যে, $\lim_{z\to 1} \frac{|z|-1}{z-1}$-টা exist করে না। ■

Exercise 2: আবার $f(z) = |z|$ নাও। দ্যাখো তো এটা $z = 1 + i$-তে differentiable কিনা ■

এবারের অংকটাও একইরকম। আগে নিজে করার চেষ্টা করো, তারপর সমাধানটা দেখো। এই অংকটা পরে কয়েক জায়গায় কাজে আসবে।

Example 3: Show that the function $f(z) = |z|^2$ is differentiable only at $z = 0$.[3] **(2015.6bi)**

SOLUTION: আজকে আমরা এই অংকটা সরাসরি সংজ্ঞা দিয়ে করব। কালকে আরেকটা কৌশল শিখব, যেটা দিয়ে একটু সহজে কাজ সারা যাবে। এই অংকটা দু ধাপে করব। প্রথম ধাপে দেখাব যে, $z=0$-এ differentiable, আর দ্বিতীয় ধাপে দেখাব যে $z \neq 0$ হলে differentiable নয়।

> Step 1: Shall show that $f(z)$ is differentiable at $z=0$.
>
> $$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} &= \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{x^2+y^2}{x+iy} \quad \left[\text{taking } z = x+iy \text{ for } x,y \in \mathbb{R}\right] \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{(x^2+y^2)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{(x^2+y^2)(x-iy)}{(x^2+y^2)} \\ &= \lim_{z\to 0} (x-iy) = 0, \end{aligned}$$
>
> Since $z \to 0$ means $x \to 0$ and $y \to 0$.
> So $f(z)$ is differentiable at $z=0$ and $f'(0)=0$.

এবার দ্বিতীয় ধাপ--

> Step 2: Shall show that $f(z)$ is not differentiable at any $z = a+ib \neq 0$.
> Here $\lim_{z\to a+ib} \frac{f(z)-f(a+ib)}{z-(a+ib)} = \lim_{z\to a+ib} \frac{|z|^2-(a^2+b^2)}{z-a-ib}$.

এবার সেই পরিচিত কৌশল, দুদিক থেকে $a+ib$-র দিকে এগোব, একবার imaginary axis-এর সঙ্গে parallel-ভাবে, তারপর real axis-এর সঙ্গে। প্রথমে imaginary axis-এর পালা--

> If $z = a+iy$, where $y \to b$, then $\frac{|z|^2-(a^2+b^2)}{z-a-ib} = \frac{y^2-b^2}{i(y-b)} = \frac{y+b}{i} \to \frac{2b}{i}$.

এবার real axis-এর সঙ্গে parallel-ভাবে এগোব।

> If $z = x+ib$, where $x \to a$, then $\frac{|z|^2-(a^2+b^2)}{z-a-ib} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = x+a \to 2a \neq \frac{2b}{i}$, since $a+ib \neq 0$.
> Hence f is not differentiable at $z = a+ib$, as required.

■

এখানে $f(z) = |z|^2$ এমন একটা function, যেটা খালি একটা বিন্দুতে differentiable. এরকম function নিয়ে কাজ করা সুবিধাজনক নয়। একটা function খানিকটা জায়গা জুড়ে প্রতিটা বিন্দুতেই differentiable হলে তবে কাজ করা বেশী সহজ। যদি কোনো বিন্দুকে ঘিরে একটা neighbourhood জুড়ে সর্বত্র differentiable হয়, তবে বলি function-টা সেই বিন্দুতে **holomorphic**.

DEFINITION: Holomorphic

A function $f(z)$ is called **holomorphic** at $a \in \mathbb{C}$ if $f(z)$ is differentiable everywhere in a neighbourhood of a.

যেমন ধরো $f(z) = z^2$ হল $z = 0$-তে holomorphic. কিন্তু $g(z) = |z|^2$ মোটেই তা নয়, যদিও $z = 0$-তে $g(z)$-টা differentiable.
Complex analysis-এ আরেকটা শব্দ শুনবে যেটাও আসলে holomorphic-এর সঙ্গে সমার্থক। শব্দটা হল **analytic**. এর বিশদ সংজ্ঞা আমরা দেব এই বইয়ের শেষ অধ্যায়ে গিয়ে। কিন্তু আপাততঃ খালি জেনে রাখো যে, একটা complex function-এর পক্ষে কোনো বিন্দুতে analytic হওয়া আর holomorphic হওয়া একই ব্যাপার।

Exercise 3: Prove that the function $f(z) = |z|^2$ is not analytic at the origin, although it is differentiable there.[5] **(2011.12d)**
HINT: এখানে analytic শব্দটা ব্যবহার করেছে। তাই উত্তরটা শুরু করব এইভাবে--

> We know that $f(x)$ is analytic at the origin if and only if it is holomorphic there.

এরপরে কী করতে হবে সে তো এক্ষুণি দেখালাম। ■

এই প্রসঙ্গে আরেকটা ভাষাও শিখে রাখো, যদি $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$-টা $\mathbb{C}$-এর সর্বত্রই differentiable হয়, তবে তাকে বলে **entire**.

DEFINITION: Entire

A function $f(z)$ is called **entire** if $f(z)$ is differentiable everywhere in $\mathbb{C}$.

Example 4: কয়েকটা entire function-এর উদাহরণ হল e^z, z^2 $\sin z$. ■

যেহেতু complex analysis-এর differentiation-এর সংজ্ঞাটা real analysis থেকে একেবারে টুকে বসানো, তাই খুব স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন জাগে $f(z)$-কে real আর imaginary অংশে ভেঙে লিখলে ব্যাপারটা আরো সহজে করা যায় কিনা। Continuity আর limit-এর বেলায় সেটা করা গিয়েছিল, $f(z)$-এর real আর imaginary অংশকে $u(x, y)$ আর $v(x, y)$ লিখলে আমরা দেখেছিলাম যে, f-এর continuous হওয়া আর u, v-এর continuous হওয়া সমার্থক ছিল। সুতরাং এখানেও আমাদের প্রাণে স্বাভাবিকভাবেই আশা যে f-এর differentiable হওয়া আর u, v-এর differentiable হওয়া সমার্থক হবে। এর মধ্যে একটা দিক ধাঁ করে প্রমাণ হয়ে যায়--যদি f-টা differentiable হয়, তবে u, v-ও differentiable হতে বাধ্য। কিন্তু দুঃখের ব্যাপার উল্টো দিকটা খাটে না। উল্টো দিকের দুঃখ নিয়ে আমরা পরে অনেক চিন্তা করব, আপাততঃ নীচের অংকে সোজা দিকটা দেখাতে বলেছে। এখানে **region** বলে একটা ভাষা ব্যবহার করা হয়েছে। এর সংজ্ঞাটা এইরকম--

DEFINITION: Region

A **region** in $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}^2$ means a connected, open, nonempty subset.

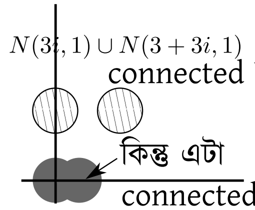


Fig 3

এখানে আবার একটা নতুন শব্দ এসে উপস্থিত হল, **connected**. এর সংজ্ঞা অংকের ভাষায় লেখার চেষ্টা করব না, কারণ সেটা একটু জটিল দেখাবে। তবে ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝতে খুবই সহজ। Connected মানে "একটা খণ্ডে সম্পূর্ণ", একাধিক বিচ্ছিন্ন টুকরো জুড়ে তৈরী নয়। বোঝার জন্য Fig 3 দেখে নাও। কেউ কেউ region শব্দটার বদলে **domain**[1] শব্দটাও ব্যবহার করে থাকে।

Example 5: Let $f : G \to \mathbb{C}$ where $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ is a function of a complex variable defined on a region G in $\mathbb{C}$ such that f is differentiable at $z = (\alpha, \beta) \in G$. Prove that $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are differentiable at (α, β).[3] **(2017, 2012, 2010)**

SOLUTION: এই অংকটা করতে দুটো ধারণা লাগবে। সেগুলো প্রথমেই বলে রাখি--

- এক, $f(z) \to 0$ আর $|f(z)| \to 0$ দুটো একই শর্ত, একটা হলেই অন্যটা হতে বাধ্য। এটা প্রায় বলাই বাহুল্য, কারণ "$f(z) \to 0$" মানে "$f(z)$-টা origin-এর দিকে যাচ্ছে", আর "$|f(z)| \to 0$" মানে "origin থেকে $f(z)$-এর দূরত্ব 0-র দিকে যাচ্ছে।" দুটোই একই কথা। এর একটা অন্যতম ফলশ্রুতি হল--

  $\frac{f(z)}{g(z)} \to 0$ হওয়া আর $\frac{f(z)}{|g(z)|} \to 0$ একই ব্যাপার (লক্ষ কর modulus-টা খালি নীচের তলায় নিয়েছি, উপরতলা আগের মতই আছে)।

  এমনটা হওয়ার কারণ হল modulus নিলে দুটোই $\frac{|f(z)|}{|g(z)|} \to 0$-তে পরিণত হয়।

- দুই, এখানে $u(x,y)$ আর $v(x,y)$ হল $\mathbb{R}^2$ থেকে $\mathbb{R}$-এ function. এরকম function-এর differentiation-এর সংজ্ঞাটা এইরকম--

  $u(x,y)$-কে (α,β)-তে differentiable বলব, যদি এমন $P, Q \in \mathbb{R}$ থাকে যাতে,

  $$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{u(x,y) - u(\alpha,\beta) - \{P\cdot(x-\alpha) + Q\cdot(y-\beta)\}}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}} \to 0 \qquad (*)$$

  হয়। এক্ষেত্রে (P,Q)-কে বলে (α,β) বিন্দুতে $u(x,y)$-এর derivative. শুধু তাই নয়, এক্ষেত্রে $P = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta)$ এবং $Q = \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta)$ হয়।

এবার তবে সমাধান শুরু করা যাক। প্রথমেই $\alpha + i\beta \equiv (\alpha,\beta)$-কে একটা নাম দিয়ে নিই--

> Let $w = (\alpha,\beta) \equiv \alpha + i\beta$.
> Let the derivative of $f(z)$ at w be $L \in \mathbb{C}$.

[1] সাবধান, এর সঙ্গে function-এর domain-এর কোনো সম্পর্ক নেই কিন্তু!

Then

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} \to L \text{ as } z \to w.$$

এটাকে সামান্য ঘুরিয়ে লিখব, L-কে বাঁদিকে নিয়ে এসে

So

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - L \to 0 \text{ as } z \to w,$$

or

$$\frac{f(z)-f(w)-L(z-w)}{z-w} \to 0 \text{ as } z \to w,$$

and hence

$$\frac{f(z)-f(w)-L(z-w)}{|z-w|} \to 0 \text{ as } z \to w.$$

এখানেই প্রথম ধারণাটা কাজে লাগালাম। এইবার আমরা সব কিছুকে real আর imaginary অংশে ভেঙে লিখব।

Let $L = A + iB$, where $A, B \in \mathbb{R}$.

Then we have

$$\frac{(u(x,y)-u(\alpha,\beta)) + i(v(x,y)-v(\alpha,\beta)) - (A+iB)((x-\alpha)+i(y-\beta))}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}} \to 0 \text{ as } (x,y) \to (\alpha,\beta).$$

Separating real and imaginary parts, we get

$$\frac{(u(x,y)-u(\alpha,\beta)) - A(x-\alpha) + B(y-\beta))}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}} \to 0$$

and

$$\frac{(v(x,y)-v(\alpha,\beta)) + B(x-\alpha) + A(y-\beta))}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}} \to 0$$

as $(x,y) \to (\alpha,\beta)$.

আমরা একটু আগে (*)-এ differentiation-এর যে সংজ্ঞা দিয়েছিলাম সেখানে $P = A$ আর $Q = -B$ বসালেই প্রথম limit-টা পাবে। একইভাবে $v(x,y)$-এর বেলায় $P = -B$ এবং $Q = -A$ নিলে $v(x,y)$-এর differentiability-ও পেয়ে যাবে।

So $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are both differentiable at (α,β), as required.

■

এতক্ষণ যা যা শিখলাম, তার ভিত্তিতে এবার কয়েকটা কসরতের অংক করা যাক।

Example 6: Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be defined by

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases},$$

where $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Prove that f is continuous at $z = 0$, but not differentiable there.[2] **(2017.6b)**

SOLUTION: প্রথমে continuity দেখাব।

> Continuous at 0:

তার জন্য দেখাতে হবে--

> Shall show $f(z) \to f(0) = 0$ as $z \to 0$.

মানে $x + iy \to 0$ হলে $\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} \to 0$ হয়। লক্ষ করো, $\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \times (x + iy)$. এর মধ্যে $x + iy$ তো 0-তে যাচ্ছেই। সমস্যা হতে পারে সঙ্গের $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$-টাকে নিয়ে। ওটার উপরতলা আর নীচেরতলা দুটোই 0-র দিকে যাচ্ছে, তাই ব্যাপারটা $\frac{0}{0}$ জাতীয়। এখানে একটা কৌশল করব--আমরা দেখাবো যে এটা সর্বদা bounded থাকবে। তাহলে $x + iy \to 0$ হলে $\frac{xy^2}{x^2+y^4} \times (x + iy)$-ও 0-তে যেতে বাধ্য। এই ব্যাপারটা ভালো করে চিন্তা করে বুঝে নাও।
এবার দ্যাখো, $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ হল $\frac{ab}{a^2+b^2}$ আকারের যেখানে--

> Let $a = x$ and $b = y^2$.
> We know that $(a \pm b)^2 \geq 0$, and hence $a^2+b^2 \pm 2ab \geq 0$. So $a^2+b^2 \geq 2 \mp ab \geq 2|ab|$.
> Hence $\frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}$. So
> $$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{1}{2}.$$
> Thus, for $z \neq 0$, we have $|f(z)| \leq \frac{1}{2}|z|$.
> Hence as $z \to 0$ we have $|f(z)| \to 0$ by sandwich law.

এখানে sandwich law-এর জায়গাটা বুঝলে তো? আমরা জানি $0 \leq |f(z)|$ (কারণ modulus কখনো < 0 হয় না)। সুতরাং $0 \leq |f(z)| \leq \frac{1}{2}|z|$. এদিকে $z \to 0$ হলে $\frac{1}{2}|z| \to 0$ হবে, তাই $|f(z)|$ বেচারী দুদিকেই 0-র মধ্যে sandwich-এর মত পিষে যাচ্ছে।
এতক্ষণ আমরা continuity দেখাচ্ছিলাম। এবার differentiability নিয়ে পড়ব।

> Not differentiable at 0: Here, for $z = x + iy \neq 0$, we have
> $$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

দেখাতে হবে $(x, y) \to (0, 0)$ হলে এর limit-টা exist করে না। তার জন্য কায়দাটা তো জানোই, দুটো আলাদা দিক থেকে limit নিয়ে অসমান দেখাব। প্রথমে এগোব real axis বরাবর (Fig 4)--

> If we approach 0 along the real axis, ie, $y = 0$ and $x \to 0$, then this approaches 0.

কারণ $y = 0$ বসালে $\frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0$ হয়ে যায়। দুঃখের ব্যাপার, $x = 0$ বসালেও $\frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0$ হয়ে যায়, তাই imaginary axis বরাবর এগোলে আলাদা কোনো limit পাবে না। খানিকক্ষণ চিন্তা করলে দেখবে, Fig 5-এর মত $x = y^2$ বরাবর এগোলে কাজ হবে। এই curve-টা কোথা থেকে পেলাম? আসলে $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$-এর সেই যে চেহারাটা দেখেছিলাম $\frac{ab}{a^2+b^2}$-এর মত সেখান থেকেই এটা আন্দাজ করেছি। সেখানে $a = x$ আর $b = y^2$ ছিল, যদি $x = y^2$ নিই, তবে উপরতলা আর নীচের তলা সমান জোরদার হয়।

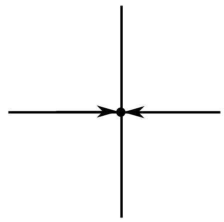


Fig 4

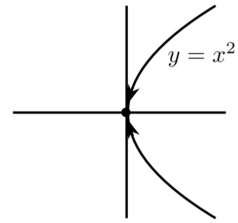


Fig 5

> But if we approach along the curve $x = y^2$, ie, we put $x = y^2$ and let $y \to 0$, then this approaches $\lim_{y\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$.

ব্যস্, কেল্লা ফতে!

> Since the two limits are different hence $f(z)$ is not differentiable at $z = 0$.

■

একইরকম স্বাদের আরেকটা অংক। এখানেও sandwich law কাজে দেবে।

Exercise 4: Prove that

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z\mathrm{Re}(z)}{|z|} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases}$$

is continuous at $z = 0$ but not differentiable at $z = 0$.[2+3] **(2014.6b)** ■

Example 7: Give an example of a function $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ which is unbounded and analytic on $\mathbb{C}$, but its restriction on $\mathbb{R}$ is a real-valued bounded function. Justify your answer.[5] **(2010.12d)**

SOLUTION: এরকম function-এর উদাহরণ না জানা থাকলে ভেবে বার করা সহজ নয়।

> One such example is $f(z) = e^{-z^2}$.

প্রথমে analytic on $\mathbb{C}$ দেখাই (যার আরেক নাম entire)--

> Since z^2 and e^z are both analytic on $\mathbb{C}$, so is their composition $f(z)$.

তারপর দেখাব unbounded.

> Also if we put $z = iy$ and let $y \to \infty$ then $|f(iy)| = |e^{y^2}| \to \infty$. Hence $f(z)$ is unbounded.

পড়ে থাকে থাকে একটাই জিনিস দেখানো--$\mathbb{R}$-এর উপর restrict করলে (মানে $z = x \in \mathbb{R}$ নিলে) $f(z)$-টা bounded হবে।

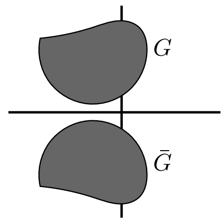


Fig 6

> But if we put $z = x \in \mathbb{R}$, then $f(z) = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq 1$, since $x^2 \geq 0$ and hence $e^{x^2} \geq 1$.
> Thus, the restriction of $f(z)$ to $\mathbb{R}$ is bounded.

■

Example 8: Let $f : G \to \mathbb{C}$, where G is a region in $\mathbb{C}$. prove that $f(z)$ is analytic at $z_0 \in G$ if and only if $\overline{f(\bar{z})}$ is analytic at $\bar{z}_0$.[3] **(2016.6di)**

SOLUTION:

> Let $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Since f is defined on G, the function g is defined on $\bar{G} = \{\bar{z} \ : \ z \in G\}$.

G এবং $\overline{G}$-এর সম্পর্কটা ছবি দিয়ে ভাবা যায়। যদি real axis বরাবর একটা আয়না বসানো থাকে, তবে G-এর প্রতিফলনটাই হবে $\overline{G}$. বোঝার জন্য Fig 6 দেখে নিতে পারো।

> Shall show that f is analytic at $z_0 \iff g$ is analytic at $\bar{z}_0$.

কাজটা আমরা ধাপে ধাপে করব।

> Step 1: Shall show that f is differentiable at some $a \in G$ if g is differentiable at $\bar{a} \in \bar{G}$.
> Let $g'(a)$ exist and equal $\ell \in \mathbb{C}$. Thus
>
> $$\lim_{z \to a} \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{a})}}{z - a} = \ell.$$
>
> So, taking conjugates of both sides,
>
> $$\lim_{z \to a} \frac{f(\bar{z}) - f(\bar{a})}{\bar{z} - \bar{a}} = \bar{\ell}.$$

> We know that $z \to a$ iff $\bar{z} \to \bar{a}$. Hence putting $w = \bar{z}$ we have
>
> $$\lim_{w \to \bar{a}} \frac{f(w) - f(\bar{a})}{w - \bar{a}} = \bar{\ell}.$$
>
> So f is differentiable at $\bar{a}$.

এবার দ্বিতীয় ধাপ--

> Step 2 : If g is analytic at $z_0 \in G$, then it is differentiable everywhere in a neighbourhood U of z_0. So, by step 1, f is differentiable in $\bar{U} = \{\bar{z} \ : \ z \in U\}$, which is a neighbourhood of $\bar{z}_0$. So f is also analytic at $\bar{z}_0$.

এতক্ষণ আমরা খালি একটা দিক করেছি। কিন্তু অন্য দিকটাও ঠিক একই যুক্তিতে হবে, খালি f ড় g-এর স্থানবিনিময় করে দেওয়ার অপেক্ষা--

> Step 3 : Interchanging the role of f and g above, we see that f is analytic at $z_0 \in G$ if and only if g is analytic at $\bar{z}_0$, as required.

■

Exercise 5: Show that the function $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ is not analytic at the origin.[3] **(2014.6dii)**
HINT: এখানে আসলে f-টা origin-এর differentiable পর্যন্ত নয়! সেটা দেখানোর জন্য $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ আকারে লিখে নাও। তাহলে $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ আর $v(x, y) = 0$ পাবে। এবার লক্ষ করো $y = x$ বসালে $u(x, x) = |x|$ হয়ে যাচ্ছে, যেটা $x = 0$-তে differentiable নয়। যেহেতু origin-এ $y = x$ লাইন বরাবর directional derivative-টা exist করছে না, তাই $u(x, y)$-টা differentiable নয়। সুতরাং f-ও differentiable হতে পারে না। গুছিয়ে লেখার দায়িত্বটা তোমাকেই দিলাম। ■

DAY 15
Cauchy-Riemann equations (part 1)

আমরা গতকালই বলেছি যে, কোনো $z_0 \in \mathbb{C}$-তে যদি $f(z)$ differentiable হয়, তবে সেই বিন্দুতে $f(z)$-এর real আর imaginary অংশ দুটোও differentiable হবে। অর্থাৎ ধরো $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, যেখানে $x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$. যদি কোনো $x_0 + iy_0$-এ f-টা differentiable হয়, তবে (x_0, y_0) বিন্দুতে $u(x, y)$ এবং $v(x, y)$-ও differentiable হতে বাধ্য। আমরা গতকাল এটাও বলেছি যে, এর উল্টো দিকটা সবসময়ে খাটে না, মানে $u(x, y)$ এবং $v(x, y)$ যদি differentiable হয়, তাও সেখানে $f(z)$-টা differentiable নাই হতে পারে। আমরা গতকাল যেসব অংক করেছি, তার মধ্যেই এরকম উদাহরণ আছে। সেরকম একটাই দেখাচ্ছি নীচের অংকে।

Example 9: আমরা গতকালই দেখেছি যে $f(z) = |z|^2$ কেবলমাত্র $z = 0$-তে differentiable। এর real আর imaginary অংশ বার করে দ্যাখো তো ওরা কোথায় differentiable হচ্ছে!

SOLUTION: এখানে $f(x+iy) = x^2 + y^2$. অতএব $u(x,y) = x^2 + y^2$ এবং $v(x,y) = 0$. এরা দুজনেই সর্বত্রই differentiable. অথচ দ্যাখো, $f(z)$-টা $z = 0$-তে differentiable হলেও অন্য কোথাও differentiable নয়। ■

তার মানে $u(x,y)$ আর $v(x,y)$-এর differentiable হওয়াই $f(z)$-এর differentiable হওয়ার পক্ষে যথেষ্ট নয়। স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে, $f(z)$-টা differentiable হলে $u(x,y)$ আর $v(x,y)$ আর বাড়তি কী শর্ত পালন করতে বাধ্য। এরকমই একটা শর্ত হল Cauchy-Riemann equations--

DEFINITION: **Cauchy Riemann Equations**

Let $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, where $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$. We say that f satisfies the **Cauchy-Riemann equations** at $z_0 = x_0 + iy_0$ if

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ and } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

at (x_0, y_0).

একটা অংক করে সংজ্ঞাটা হজম করে নিই। তার আগে বলে রাখি যে, অনেক সময়ে $\frac{\partial u}{\partial x}$ না লিখে আমরা সংক্ষেপে u_x লিখে থাকি। একইভাবে u_y, v_x ইত্যাদিও লেখা হয়।

Example 10: দ্যাখো তো $f(z) = z^2$ সর্বত্র Cauchy-Riemann equation দুটো পালন করে কিনা।

SOLUTION: প্রথমে $u(x,y)$ আর $v(x,y)$ বার করে নেওয়া যাক।

$$f(z) \equiv f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

অতএব $u(x,y) = x^2 - y^2$ আর $v(x,y) = 2xy$. লক্ষ কর

$$u_x = 2x, \quad u_y = -2y, \quad v_x = 2y, \quad v_y = 2x.$$

যেহেতু $u_x = v_y$ এবং $u_y = -v_x$ হচ্ছে, সুতরাং Cauchy-Riemann equation দুটো সর্বত্রই খাটছে। ■

Exercise 6: যদি $f(z) = |z|^2$ নিই, তবে Cauchy-Riemann equation দুটো কোথায় কোথায় পালিত হয়? ■

Cauchy-Riemann equation দুটোকে ব্যবহার করে আমরা $f(z)$-এর differentiable হওয়ার একটা চমৎকার necessary and sufficient শর্ত দিতে পারি।

THEOREM

A function $f(z) \equiv f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ is differentiable at $z_0 = x_0 + iy_0$ if and only if both the following conditions hold.

1. $u(x,y), v(x,y)$ are differentiable at (x_0, y_0)
2. $f(z)$ satisfies the Cauchy-Riemann equations at (x_0, y_0)..

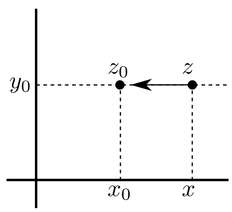


Fig 7

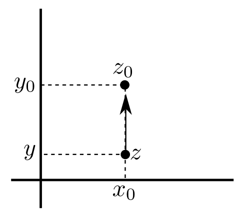


Fig 8

এই গুরুত্বপূর্ণ theorem-টা এবার আমরা ধীরে ধীরে প্রমাণ করব। এটা একটা if and only if জাতীয় theorem. তাই প্রমাণটার দুটো অংশ থাকবে, if আর only if. শুরু করব only if অংশটা দিয়ে।

15.1 Only if part

এখানে দেখাবো যে, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$-টা differentiable হলে u আর v differentiable হবে, এবং Cauchy-Riemann equation দুটো পালিত হবে।
এর মধ্যে প্রথম অংশটা আমরা গতকালই প্রমাণ করেছি। দ্বিতীয় অংশের প্রমাণটাই চেয়েছে নীচের অংকে।

Example 11: Prove that a necessary condition that the function $f = u + iv$ is differentiable at a point $z_0 = x_0 + iy_0$ is that $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ exist and $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ at that point.[5] **(2006.13c)**

SOLUTION:

> Since f is differentiable at z_0, so
>
> $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
>
> exists in $\mathbb{C}$. Let this limit be $A + iB$, where $A, B \in \mathbb{R}$.

তার মানে z যতই z_0-এর কাছে যাবে, ততই আমরা $A + iB$-র কাছে যাব। মনে রেখো, পুরো complex plane-টা হল একটা মাঠের মত, যার মধ্যে z_0 হল একটা বিন্দু। z বিন্দুটা ক্রমশঃ তার দিকে এগিয়ে আসছে, সেই এগিয়ে আসাটা যেকোনো দিক থেকেই হতে পারে, উত্তর, দক্ষিণ, পূর্ব, পশ্চিম বা অন্য কোনো দিক থেকে। z যেদিক থেকেই আসুক না কেন, limit-টা কিন্তু সবসময়েই $A + iB$ হবে। এই কথাটা মাথায় রেখে আমরা z-কে দুটো বিশেষ দিক থেকে এগোতে দেব--

- এক, real axis-এর সঙ্গে parallel রেখে (Fig 7),
- আর দুই, imaginary axis-এর সঙ্গে parallel রেখে (Fig 8)।

প্রথমে real axis-এর পালা--

> Letting $z \to z_0$ parallel to the real axis we take
>
> $$z = x + iy_0 \text{ where } x \to x_0.$$

Then

$$A + iB = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{[u(x, y_0) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{x - x_0}.$$

Equating real and imaginary parts,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} = A$$

and

$$\lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = B.$$

Thus $\frac{\partial u}{\partial x}$ and $\frac{\partial v}{\partial x}$ exist at (x_0, y_0) and

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = A \text{ and } \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = B. \qquad (\mathbf{1})$$

এর পর পালা imaginary axis-এর--

Similarly, letting $z \to z_0$ along imaginary axis by taking $z = x_0 + iy$ with $y \to y_0$, we have

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -B \text{ and } \frac{\partial v}{\partial u}(x_0, y_0) = A. \qquad (\mathbf{2})$$

এবার দু দিককে মেলাতে হবে--

From $(\mathbf{1})$ and $(\mathbf{2})$ we see that $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ and $\frac{\partial v}{\partial y}$ all exist at (x_0, y_0) and

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

as required.

■

এই প্রমাণ থেকে আরেকটা জিনিসও পেয়ে গেলাম--যদি $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$-টা differentiable হয়, তবে $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ হবে, অর্থাৎ মনে মনে y-কে স্থির রেখে পুরোটাকে খালি x-এর সাপেক্ষে differentiate করে দিলেই হবে। একইভাবে $f'(z_0)$-কে $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$ আকারেও লেখা যায়। এই সব নিয়ে একটা ছোট্টো theorem বানিয়ে রাখা যাক, পরে কাজে দেবে।

THEOREM

If $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ (where $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$) is differentiable at a point $x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ (where $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$), then

$$f'(x_0 + iy_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

এই theorem-টা ব্যবহার করে চট্ করে প্রমাণ করতে পারবে কেন e^z-এর derivative আবার e^z-ই হয়।

Exercise 7: Let f be a complex-valued function of a complex variable defined on an open subset U of the complex plane $\mathbb{C}$. If f is differentiable in U, show that the first order partial derivatives of f exist and satisfy the Cauchy-Riemann equations in U.[5] **(2008.14a)**
HINT:
আগের অংকটাই। ■

Exercise 8: Let $f : G \to \mathbb{C}$ where $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ be a function of a complex variable defined on a region G, which is differentiable at $z_0 = x_0 + iy_0$. Then prove that $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are differentiable at (x_0, y_0) and

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

at (x_0, y_0).[5] **(2015.6d)**
HINT: ফের একই অংক। ■

Exercise 9: Let $f : G \to \mathbb{C}$ where $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ is a function of complex variables defined on a region G in $\mathbb{C}$, ($u(x,y)$ and $v(x,y)$ being real-valued functions). If f is differentiable on G prove that u, v are also differentiable on G and satisfy Cauchy-Riemann equations at every point of G.[5] **(2012.12d)**
HINT: প্রথম অংশটা গতকাল করেছিলাম Example 5-এ। ■

Exercise 10: If $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ is a complex function such that u, v are real-valued functions of two real variables x, y and $z = x + iy$, and f is differentiable at $z_0 = x_0 + iy_0$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$), then prove that u and v are differentiable at (x_0, y_0) and satisfy Cauchy-Riemann equations there.[5] **(2010.12c)**
HINT: একই অংক আবার, সামান্য অন্য ভাষায়। ■

15.2 If part

এইবার উল্টো দিকটা দেখাব, মানে u, v যদি দুজনেই differentiable হয়, এবং Cauchy-Riemann equation দুটো পালিত হয়, তবে f-টা differentiable হতে বাধ্য।

Example 12: Let u and v be two real-valued functions defined on an open set $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

Assume also that u and v are differentiable at $c \in G$ and that the partial derivatives satisfy the Cauchy-Riemann equations at c. Prove that the function $f = u + iv$ is differentiable at $c \in \mathbb{C}$.[5] **(2009.12c)**

SOLUTION:

> Shall show $\lim_{z\to c} \frac{f(z)-f(c)}{z-c}$ exists in $\mathbb{C}$.
>
> Let $c = a + ib$ and $z = x + iy$, where $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.
>
> Then
> $$f(z) - f(c) = [u(x, y) - u(a, b)] + i[v(x, y) - v(a, b)]. \qquad (*)$$

এখানে $u, v : G \to \mathbb{R}$, যেখানে $G \subseteq \mathbb{R}^2$. এই রকম function-দের differentiability-র সংজ্ঞা মনে আছে তো? সেটাই আমরা লিখেছি নীচে--

> Since $u(x, y)$ is differentiable at (a, b), hence
> $$\frac{u(x, y) - u(a, b) - u_x(a, b)(x - a) - u_y(a, b)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \to 0 \text{ as } (x, y) \to (a, b).$$
> Similarly for $v(x, y)$,
> $$\frac{v(x, y) - v(a, b) - v_x(a, b)(x - a) - v_y(a, b)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \to 0 \text{ as } (x, y) \to (a, b).$$

লেখার সুবিধার জন্য আমরা উপরতলার জিনিস দুটোকে নতুন নাম দিয়ে নেব--

> Let
> $$\begin{aligned} \epsilon &= u(x, y) - u(a, b) - u_x(a, b)(x - a) - u_y(a, b)(y - b), \\ \eta &= v(x, y) - v(a, b) - v_x(a, b)(x - a) - v_y(a, b)(y - b). \end{aligned}$$

আমরা ϵ আর η ব্যবহার করে সব কিছু লিখব। তার জন্য লক্ষ করো,

- $u(x, y) - u(a, b) = u_x(a, b)(x - a) + u_y(a, b)(y - b) + \epsilon$.
- $v(x, y) - v(a, b) = v_x(a, b)(x - a) + v_y(a, b)(y - b) + \eta$.
- $z \to c$ হলে $\frac{\epsilon}{|z-c|} \to 0$ এবং $\frac{\eta}{|z-c|} \to 0$ হয়।

এবার আমরা (*) থেকে লিখতে পারি--

Hence, writing u_x for $u_x(a,b)$ etc,

$$\begin{aligned} f(z)-f(c) &= ((x-a)u_x+(y-b)u_y)+i((x-a)v_x+(y-b)v_y)+(\epsilon+i\eta) \\ &\quad \text{এবার Cauchy-Riemann equation দুটো কাজে লাগিয়ে } u_y \text{ আর} \\ &\quad v_y\text{-কে } u_x \text{ আর } v_x \text{ দিয়ে লিখব।} \\ &= ((x-a)u_x-(y-b)v_x)+i((x-a)v_x+(y-b)u_x)+(\epsilon+i\eta) \\ &\quad \text{[by Cauchy-Riemann equations]} \\ &\quad \text{এবার } u_x\text{-ওয়ালা জিনিসগুলোকে এক জায়গায়,} \\ &\quad \text{আর } v_x\text{-ওয়ালাগুলোকে আরেক জায়গায় জড়ো করব।} \\ &= [(x-a)+i(y-b)]u_x+[i(x-a)-(y-b)]v_x+(\epsilon+i\eta) \\ &= [(x-a)+i(y-b)]u_x+i[(x-a)+i(y-b)]v_x+(\epsilon+i\eta) \\ &= (z-c)(u_x+iv_x)+(\epsilon+i\eta). \end{aligned}$$

So

$$\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=(u_x+iv_x)+\frac{\epsilon+i\eta}{z-c}.$$

এখানে RHS-এর প্রথম জিনিসটার মধ্যে কোনো z নেই, তাই $z \to c$ হলে ওর কোনো পরিবর্তন হবে না। কিন্তু দ্বিতীয় জিনিসটার মধ্যে z আছে (সাবধান, ϵ আর η-র মধ্যেও কিন্তু z লুকিয়ে আছে!)।

Now $\frac{\epsilon+i\eta}{z-c} \to 0$ as $z \to c$.

[[Because:

$$\frac{\epsilon}{|z-c|} \to 0 \implies \left|\frac{\epsilon}{|z-c|}\right| \to 0 \implies \frac{\epsilon}{z-c} \to 0.$$

Similarly, $\frac{\eta}{z-c} \to 0$.

]]

So

$$\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=u_x(a,b)+iv_x(a,b)\in\mathbb{C}.$$

Thus, $f'(c)$ exists, as required.

■

Exercise 11: Let G be a region in $\mathbb{C}$ and $(x_0,y_0)\in G$. If $u,v:G\to\mathbb{R}$ are differentiable at (x_0,y_0), prove that $u+iv:G\to\mathbb{C}$ is differentiable at (x_0,y_0), provided u,v satisfy the Cauchy-Riemann equations at (x_0,y_0).[5] **(2014.6c)**
HINT: আগের অংকটাই। ■

Exercise 12: Under what condition a function $f:G\to\mathbb{C}$ (where $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, u,v being real-valued) is differentiable at a point $z_0\in G$, where G is a region in $\mathbb{C}$? Justify your answer. [1+4] **(2016.6c)**

HINT: এই প্রশ্নটার নানারকম উত্তর হতে পারে। একটা উত্তর হল $u(x,y)$ আর $v(x,y)$ ওই z_0 বিন্দুতে differentiable, এবং সেখানে Cauchy-Riemann equation দুটো পালন করে। প্রমাণটা তো এক্ষুণি করলামই। ■

15.3 আরেকটা sufficient condition

আমরা দেখলাম যে, Cauchy-Riemann equation দুটো আর u, v-এর differentiability, এই দুটো শর্ত একসঙ্গে f-এর differentiability-র জন্য necessary এবং sufficient condition. মুস্কিল হল, u আর v দুজনে differentiable কিনা, সেটা অনেক সময়ে সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করে পরীক্ষা করা কঠিন হয়। সেরকম জায়গায় আরেকটা sufficient condition ব্যবহার করা সুবিধাজনক হতে পারে। সেটা দিলাম নীচের theorem-এ। এখানে differentiability পরীক্ষা করতে হবে না, খালি continuity পরীক্ষা করলেই চলবে। তবে এই theorem-এর শর্তটা কিন্তু কেবল sufficient, মোটেই necessary নয়।

THEOREM

Let $G \subseteq \mathbb{R}^2$ be an open set. Let $u : G \to \mathbb{R}$. Let $(x_0, y_0) \in G$. If u_x, u_y exist in a neighbourhood of (x_0, y_0), and are continuous at (x_0, y_0), then $u(x,y)$ must be differentiable at (x_0, y_0).

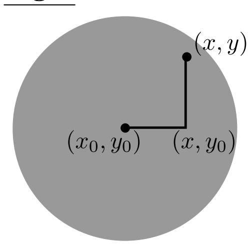
Proof: প্রথমেই লক্ষ করো, এই theorem-এ কোনো $\mathbb{C}$-এর ব্যাপার নেই। এটা আসলে calculus of several variable-এর একটা theorem. আমরা complex analysis-এর কাজে এই theorem-টা ব্যবহার করব বলে এটা এখানে উল্লেখ করলাম। এর প্রমাণটা না জানলেও এই বই পড়তে কোনো অসুবিধা হবে না। তবে কেউ যদি নিতান্তই প্রমাণটা জানতে চাও, সেই ভেবেই প্রমাণটা দিচ্ছি। কিন্তু সাবধান, ধাপগুলো কিছুটা কঠিন। কষ্ট হলে প্রমাণটা বাদ দিয়ে যেও, কিন্তু ভয়ের চোটে complex analysis পড়াই বন্ধ করে দিও না!

আমাদের দেখাতে হবে যে, $u(x,y)$ আর $v(x,y)$ হল differentiable. এইরকম function-এর differentiability-র সংজ্ঞা অনুযায়ী $u(x,y)$-র বেলায় আমাদের দেখাতে হবে--

$$\frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - (y-y_0)u_y(x_0,y_0) - (x-x_0)u_x(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \to 0,$$

অর্থাৎ কিনা--

Fig 9



Shall show

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x,y) \in N((x_0,y_0),\delta)$

$$\left| \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - (y-y_0)u_y(x_0,y_0) - (x-x_0)u_x(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right| < \epsilon.$$

প্রথমেই $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

Since u_x, u_y are continuous at (x_0, y_0), hence

$$\exists \delta > 0 \quad \forall (x,y) \in N((x_0,y_0),\delta)$$
$$|u_x(x,y) - u_x(x_0,y_0)| < \tfrac{\epsilon}{2},$$
$$|u_y(x,y) - u_y(x_0,y_0)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

এখানে আবার $\frac{\epsilon}{2}$ এল কেন? কারণটা একটু পরেই বুঝতে পারবে!

$\boxed{\exists \delta}$ Choose this $\delta > 0$.

$\boxed{\forall (x,y)}$ Take any $(x,y) \in N((x_0,y_0),\delta)$.

যেটা নিয়ে কাজ করতে চলেছি তার উপরতলায় আছে $u(x,y) - u(x_0,y_0) - (y-y_0)u_y(x_0,y_0) - (x-x_0)u_x(x_0,y_0)$. এর শুরুতে রয়েছে $u(x,y) - u(x_0,y_0)$. এটাকে দুই ভাগে ভেঙে লিখলে সুবিধা হবে। তার জন্য Fig 9-এ যেমন দেখিয়েছি সেইরকমভাবে (x_0,y_0) থেকে (x,y)-তে যাবার সময়ে (x,y_0) হয়ে যাব।

Now

$$\begin{aligned} u(x,y) - u(x_0,y_0) &= u(x,y) - u(x,y_0) + u(x,y_0) - u(x_0,y_0) \\ &= u_y(x,y^*)(y-y_0) + u_x(x^*,y_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

for some x^* between x and x_0,
and some y^* between y and y_0 by MVT.

এখানে আমরা mean value theorem (MVT) লাগিয়েছি দুইবার। একবার horizontal লাইনটার উপরে, একবার vertical লাইনটার উপরে। এবার বুঝবে কেন আমরা আগে $\frac{\epsilon}{2}$ নিয়েছিলাম। আসলে ϵ-টাকে দুইভাগে ভেঙে নিয়েছিলাম, একটা horizontal লাইনটার জন্য, অন্যটা vertical লাইনটার জন্য।

So

$$\begin{aligned} & |u(x,y) - u(x_0,y_0) - (y-y_0)u_y(x_0,y_0) - (x-x_0)u_x(x_0,y_0)| \\ = \ & |(u_x(x^*,y_0) - u_x(x_0,y_0))(x-x_0) + (u_y(x,y^*) - u_y(x_0,y_0))(y-y_0)| \\ \leq \ & |(u_x(x^*,y_0) - u_x(x_0,y_0))(x-x_0)| + |(u_y(x,y^*) - u_y(x_0,y_0))(y-y_0)| \\ \leq \ & |x-x_0|\tfrac{\epsilon}{2} + |y-y_0|\tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Hence

$$\left|\frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-(y-y_0)u_y(x_0,y_0)-(x-x_0)u_x(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right|$$
$$< \frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\times\frac{\epsilon}{2}+\frac{|y-y_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\times\frac{\epsilon}{2}$$
$$= \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

as required.

[Q.E.D]

নীচের অংকটা এই theorem-টা লাগালেই আমাদের চেনা জিনিসে পরিণত হবে।

Exercise 13: Suppose $f=u+iv$ is defined in some neighbourhood $N(z_0)$ of z_0 and that u,v,u_x,u_y,v_x,v_y are continuous at z_0, and u,v satisfy Cauchy-Riemann equations at z_0. Prove that f is differentiable at z_0.[6] **(2011, 2007)**

HINT:

অংকটায় একটু ভুল আছে। এখানে একটা বাড়তি শর্ত দরকার ছিল--u_x,u_y,v_x,v_y are defined in some neighbourhood of z_0.

এখানে প্রমাণটা শুরু হবে উপরের theorem-টাকে উল্লেখ করে, এইভাবে

> By standard result from calculus of several variables, we know that if u_x,u_y,v_x,v_y exist over a neighbourhood of (x_0,y_0) and are continuous at (x_0,y_0), then $u(x,y),v(x,y)$ must be differentiable at (x_0,y_0).

ব্যস্, এইবার এটা Example 12-এ পরিণত হয়েছে। সুতরাং সেই অংকের সমাধানটা হুবহু অনুকরণ করে গেলেই হবে। ■

DAY 16
Cauchy-Riemann equations (part 2)

আজকে আমরা Cauchy-Riemann equation দুটোর কিছু প্রয়োগ শিখব। প্রয়োগগুলোকে দুভাগে ভাগ করেছি--সহজ, আর কম সহজ।

16.1 সহজ প্রয়োগ

এখানে যে কটা অংক করব, তাদের সবারই মূল ব্যাপারটা এক--একটা function দিয়ে দেখতে বলা হবে কোথায় কোথায় differentiable হবে।

Example 13: Show that the function $f(z)=|z|^2$ is differentiable only at $z=0$.[3] **(2015.6bi)**

SOLUTION: এই অংকটা আমরা আগেই সরাসরি সংজ্ঞা লাগিয়ে করেছিলাম। এবার Cauchy-Riemann equation দিয়ে করব।

> Here $f(z) \equiv f(x,y) = x^2 + y^2$. So $u(x,y) = x^2 + y^2$ and $v(x,y) = 0$.
>
> Clearly, both u and v are differentiable everywhere.
>
> So f is differentiable at a point if and only the Cauchy-Riemann equations hold there.
>
> Also $u_x(x,y) = 2x,\ u_y(x,y) = 2y,$ and $v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0$.
>
> So the Cauchy-Riemann equations hold if and only if $2x = 0$ and $2y = 0$.
>
> Hence $f(z)$ is differentiable only at $z = 0$.

■

Example 14: Prove that the function given by $z \mapsto \bar{z}$ on $\mathbb{C}$ is not differentiable at any point in $\mathbb{C}$.[2] **(2009.12bii)**

SOLUTION: এই অংকটা অন্ততঃ দুভাবে করা যায়, এক-- Cauchy-Riemann equations দিয়ে, আর দুই--সরাসরি সংজ্ঞা থেকে। প্রথম পদ্ধতিতে সমাধানটা সংক্ষিপ্ত হবে, দ্বিতীয় পদ্ধতিতে একটু লম্বা।

Cauchy-Riemann equations লাগানোর জন্য প্রথম কাজ হল $f(z)$-কে তার real আর imaginary অংশ $u(x,y)$ আর $v(x,y)$-তে ভেঙে লেখা--

> Here $f(z) = \bar{z}$, or
>
> $$f(x+iy) \equiv u(x,y) + iv(x,y) = x - iy.$$
>
> So
>
> $$u(x,y) = x \text{ and } v(x,y) = -y.$$
>
> Clearly these are differentiable everywhere.

এর পরের কাজ হল u_x, u_y, v_x, v_y বার করে দেখা যে $u_x = v_y$ আর $u_y = -v_x$ হয় কিনা। দেখাতে দিয়েছে যে $f(z)$ কোথাও differentiable হবে না, তার মানে এই দুটো Cauchy-Riemann equation দুটোর অন্ততঃ একটা সিদ্ধ হবে না। প্রথমে u_x, v_y বার করে দেখি--

> Thus, $u_x = 1$ and $v_y = -1$.

এরা মোটেই সমান নয়, ব্যস্ কেল্লা ফতে।

> Since $u_x \neq v_y$ everywhere, hence Cauchy-Riemann equations do not hold anywhere. So the function is not differentiable anywhere.

অংকটা সরাসরি সংজ্ঞা দিয়েও করা যেত। এবার সেটা দেখাচ্ছি।

<u>বিকল্প পদ্ধতি</u>

> Let $f(z) = \bar{z}$.
>
> Take any $z_0 \in \mathbb{C}$.

> For f to be differentiable at z_0 we need
> $$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{*}$$
> to exist in $\mathbb{C}$.
> Now
> $$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h},\end{aligned}$$
> where $h=z-z_0$.

এইবার সেই কায়দা, দু দিক থেকে এগিয়ে আলাদা আলাদা limit পাওয়া--

> Now if $h\to 0$ along the real axis,
> ie, if $h=x+i0$ with $x\to 0$, then
> $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$
> But if $h\to 0$ along the imaginary axis,
> ie, if $h=0+iy$ with $y\to 0$, then
> $$\lim_{y\to 0}\frac{-iy}{iy}=-1.$$
> Since we get two different values depending on how $h\to 0$, the limit (*) does not exist.
> Hence f is not differentiable at any z_0.

■

Example 15: Find the points where the following function f is differentiable and hence deduce that it is nowhere analytic: $f=u+iv$, where $u(x,y)=x^2y^2$, $v(x,y)=2x^2y^2$.[5] **(2006.14a)**

SOLUTION:

> Since $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are polynomials in x,y, hence they are differentiable everywhere.

অতএব f-টা differentiable কিনা সেটা এখন খালি নির্ভর করছে Cauchy-Riemann equation দুটো পালিত হবার উপর।

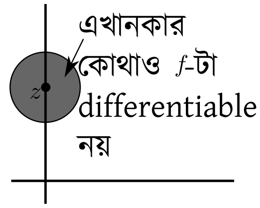


Fig 10

So f is differentiable iff and the Cauchy-Riemann equations hold.
Here $u_x = 2xy^2,\ u_y = 2x^2y,\ v_x = 4xy^2,$ and $v_y = 4x^2y.$
The Cauchy-Riemann equations are

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 2xy^2 &= 4x^2y \\ 2x^2y &= -4xy^2 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 2xy(y-2x) &= 0 \\ 2xy(x+2y) &= 0. \end{aligned}$$

Clearly, these hold iff ($x = 0$ or $y = 0$).
So f is differentiable only when either $x = 0$ or $y = 0$.

তার মানে f-টা খালি দুটো axis-এর উপরে differentiable, অন্য কোথাও differentiable নয়। এবার দেখাতে হবে যে কোথাও analytic নয়। তার জন্য যে কোনো বিন্দু z নাও axis দুটো উপরে। সেটাকে ঘিরে যাই neighbourhood নাও না কেন, সেটা axis-এর বাইরে উপ্‌ছে পড়তে বাধ্য (Fig 10)। ফলে neighbourhood-এর সর্বত্র f-টা differentiable হতে পারে না। তাই f মোটেই z-এ analytic হবে না। এটাকে অংকের ভাষায় সংক্ষেপে লেখার জন্য interior-এর ধারণাটা কাজে দেবে। Interior কাকে বলে মনে আছে তো? কোনো set-এর ভিতরে যেসব point-কে ঘিরে set-এর মধ্যে খানিকটা neighbourhood আছে, সেই সব point-কে নিয়ে তৈরী হয় interior-টা। তাই interior যদি nonempty হয়, তার মানে হল set-টা খানিকটা মোটা। কিন্তু axis দুটো মোটেই মোটা কিছু নয়, একেবারে ফিন্‌ফিনে দুটো লাইন, তাই ওর মধ্যে যে point-কে ঘিরেই neighbourhood না কেন সেটা set-এর বাইরে উপ্‌ছে পড়ে।

Now the interior of the set

$$\{z = x + iy \ :\ x = 0 \text{ or } y = 0\}$$

> is empty. So f is not analytic anywhere.

■

Exercise 14: If $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ $[x, y \in \mathbb{R}]$ is given by $u(x,y) = x^2y^2$ and $v(x,y) = 4x^2y^2$, find the points in the complex plane where the Cauchy-Riemann equations are satisfied. Discuss the analyticity of f.[3+2] **(2013.6d)**
HINT: আগের অংকটার মতই। এখানে "Discuss the analyticity" মানে বার করতে হবে কোথায় কোথায় function-টা analytic. ■

16.2 একটু কম সহজ প্রয়োগ

এতক্ষণ যে অংকগুলো করছিলাম, সেখানে একটা করে function-এর ফর্মুলা দেওয়া থাকছিল, এবং আমাদের পরীক্ষা করে দেখতে হচ্ছিল সেটা কোথায় কোথায় differentiable. এবারে যে অংকগুলো করব, সেখানে পুরো ফর্মুলাটা দেওয়া থাকবে না, খালি function-টার কিছু ধর্ম দেওয়া থাকবে। তার ভিত্তিতে বলতে হবে, function-টা differentiable কিনা।

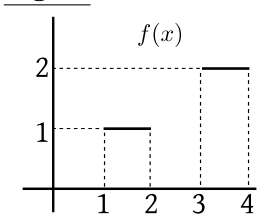
Example 16: Prove that a real function of a complex variable either has derivative zero, or the derivative does not exist.[3] **(2006.13b)**
SOLUTION: এই অংকে আমরা কাজ করছি একটা "real function of a complex variable" নিয়ে। তার মানে $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ হিসেবে লিখলে $v(x,y) = 0$ হবে।

> Let $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, where $v(x,y) \equiv 0$.

আমাদের দেখাতে বলেছে হয় $f'(z)$ exist করে না, নয় তো $f'(z) = 0$. যখনই এরকম হয়-এটা-নয়-ওটা জাতীয় জিনিস দেখাতে হয়, আমরা সেটাকে একটু অন্যভাবে সাজিয়ে নিই-- এটা নয় ধরে নিয়ে ওটাকে প্রমাণ করি। আমাদের ক্ষেত্রে "এটা" মানে $f'(z)$ exist না করা", আর "ওটা" মানে "$f'(z) = 0$ হওয়া"। তার মানে আমরা দেখাব--

> Shall show that if $f(z)$ is differentiable at any point z_0 then $f'(z_0) = 0$.
>
> Since, f is differentiable at $z_0 = x_0 + iy_0$ (where $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$), the Cauchy-Riemann equations must hold, or
>
> $$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0). \end{aligned}$$
>
> Now, since $v(x,y) \equiv 0$, so $v_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) = 0$.

Fig 11



> So we have $u_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = 0$.

এবার আমরা এই তথ্যটা ব্যবহার করব যে $f = u + iv$ যদি differentiable হয় তবে $f' = u_x + iv_x$ হয়।

> We know that for a differentiable function f we have $f' = u_x + iv_x$. So
>
> $$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = 0 + i0 = 0,$$
>
> as required.

■

Exercise 15: Let f be a real-valued function of a complex variable and differentiable at a point $\alpha \in \mathbb{C}$. Prove that $f'(\alpha) = 0$.[2] **(2015.6bii)**
HINT: আগের অংকটারই রূপভেদ। ■

এইবারের অংকগুলো করার আগে সামান্য ভূমিকা করে নেওয়া যাক। প্রথমে আমরা একটু real analysis-এর কথা ভেবে নিই-- ধরো $S \subseteq \mathbb{R}$. যদি $f : S \to \mathbb{R}$ একটা constant function হয় তবে আমরা জানি যে $f' \equiv 0$ হবে। এর উল্টোটাও কি সত্যি? মানে, যদি $f : S \to \mathbb{R}$ একটা এমন differentiable function হয় যাতে $f' \equiv 0$, তার মানে কি f একটা constant function হতে বাধ্য? এর উত্তর হচ্ছে-- "না"। যেমন ধর যদি $S = (1, 2) \cup (3, 4)$ হলে আমরা f নিতে পারি এই রকম (Fig 11)--

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in (1, 2) \\ 2 & \text{if } x \in (3, 4) \end{cases} .$$

সেক্ষেত্রে f মোটেই constant নয়, কিন্তু f' সর্বত্রই শূন্য!
কিন্তু যদি আমরা একটা বাড়তি শর্ত চাপাই যে S-কে একটা interval হতে হবে, তাহলে কিন্তু উত্তরটা "হ্যাঁ" হতে বাধ্য, অর্থাৎ derivative শূন্য হলে function-টা constant না হয়ে যায় না।
ঠিক একই রকম কথা বলা যায় যদি x, y দুটো variable থাকে। ধর $u(x, y)$ দুই variable-এর একটা function, যেটা $A \subseteq \mathbb{R}^2$-এর উপরে defined. এখানে A-টা যদি **connected** হয় (মানে অখণ্ড হয়, কয়েকটা টুকরোয় ভাঙা না হয়), আর A-র প্রতিটি বিন্দুতে যদি $u_x = 0, u_y = 0$ হয়, তবে $u(x, y)$ একটা constant function হতে বাধ্য। এইটা calculus of several variables-এর একটা theorem, যেটা আমরা এখানে ব্যবহার করব (কিন্তু প্রমাণ করব না)।

Example 17: Let f be analytic on a region G. If $f'(z) = 0$ on G, show that f is constant on G.[4] **(2007.13d)**
SOLUTION:

> Let $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ where $x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$.
> Since f is differentiable, hence so are u and v.
> We know that $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$.
> So the condition $f'(z) = 0$ implies $u_x(x, y) = v_x(x, y) = 0$.
> By Cauchy-Riemann equations, $v_y = u_x = 0$ and $v_x = -u_y = 0$.

এইবার আমরা calculus of several variables-এর সেই theorem-টা কাজ লাগাব--

> By standard result of calculus of several variables we know that if a differentiable real valued function defined over a region in $\mathbb{R}^2$ has zero partial derivatives, then it must be a constant function.

মনে রেখো region-এর সংজ্ঞায় connected ধরা আছে!

> So $u(x,y)$ and $v(x,y)$ must be constant functions.
> Thus $f = u + iv$ must be a constant function, as required.

■

Exercise 16: If f is an analytic function on a region D such that $\text{Im}(f) = 0$, then show that f is a constant.[5] **(2012.12c)**
HINT: এখানে notation-এর ব্যাপারে একটু সতর্ক থেকো। $\text{Im}(f)$ লিখে অনেক সময়ে f-এর image বোঝানো হয়। এখানে অবশ্য imaginary অংশ বোঝানো হচ্ছে।
আগের দুটো অংকের সমাধান মেলালেই এই অংকটা হয়ে যাবে। $\text{Im}(f) = 0$ হওয়ায় Example 16 থেকে পাবে $f'(z) = 0$. অতএব আগের অংকটা থেকে পাবে f-টা constant হতে বাধ্য। ■

Example 18: If f is analytic in a domain $D \subseteq \mathbb{C}$ and if $|f|$ is constant in D, show that f is constant. [4] **(2008.13d)**
SOLUTION: এখানে domain মানে হল $\mathbb{C}$-এর open, connected, nonempty subset. আমাদের কাজ হল f-কে constant দেখানো, তার মানে যদি $f = u + iv$ নিই, তবে u আর v-কে constant দেখানো। যেহেতু f-কে analytic দেওয়া আছে, তাই u আর v দুজনেই differentiable. আবার D-কে connected দেওয়া আছে, তাই এর জন্য u_x, u_y, v_x আর v_y-কে শূন্য দেখালেই চলবে।
আমাদের হাতে আছে দুটো তথ্য--

1. f হল analytic, তার মানে differentiable, সুতরাং Cauchy-Riemann equation দুটো খাটবে,
2. $|f|$ হল constant. তার মানে $|f|^2$-এর partial derivative দুটো শূন্য।

সুতরাং সব মিলিয়ে মোট চারটে equation পেলাম, u_x, u_y, v_x, v_y এই চারজনকে নিয়ে। সেগুলো থেকে দেখাতে পারা উচিত যে এরা সবাই শূন্য।

> Let $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ where $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$.
> Since f is analytic, hence $u(x,y)$, v(x,y) are differentiable on the domain D.
> Let $|f(x,y)| = c$.
> Then $|f|^2 = u^2 + v^2 = c^2$.
> Differentiating,
>
> $$\begin{aligned} 2uu_x + 2vv_x &= 0 \\ 2uu_y + 2vv_y &= 0. \end{aligned}$$

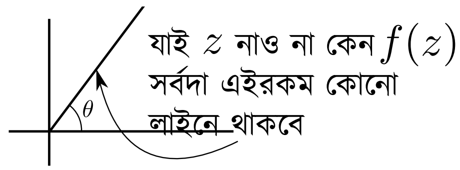


Fig 12

Since f is analytic, so by the Cauchy-Riemann equations,

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

এবার আমরা সব কিছুকেই v দিয়ে লিখব--

So

$$\begin{aligned} 2uv_y + 2vv_x &= 0 \\ -2uv_x + 2vv_y &= 0. \end{aligned}$$

Multiplying the first equation by u, and the second equation by v, and adding,

$$2(u^2 + v^2)v_y = 0,$$

or

$$2c^2 v_y = 0.$$

Similarly, eliminating v_y, we have

$$2c^2 v_x = 0.$$

If $c^2 = 0$, then $|f| = 0$. So $f = 0$, a constant.
If $c^2 \neq 0$, then $v_x = v_y = 0$. So from the Cauchy-Riemann equations, $u_x = u_y = 0$.
So u, v are constant functions, and hence f is a constant function, as required.

■

নীচের দুটো অংক এই অংকটাই সামান্য অন্য ভাষায়। Region আর domain এখানে সমার্থক ধরতে পারো।

Exercise 17: Let $f : G \to \mathbb{C}$ be analytic on a region G. If $|f|$ is constant on G, then prove that f is constant on G.[2] **(2016.6dii)** ■

Exercise 18: Suppose that f is an analytic function in a region $D \subseteq \mathbb{C}$ having constant modulus. Show that it is a constant function.[5] **(2011.12c)** ■

Example 19: If $f(z)$ is analytic in a domain D, then show that $f(z)$ must be constant if $\arg(f)$ is constant.[2] **(2017.6dii)**

SOLUTION: এখানে "$\arg(f)$ is constant" বলতে কী বোঝাচ্ছে সেটা Fig 12-এ দেখিয়েছি।

> Here
> $$\exists\theta \in \mathbb{R} \quad \forall z \in D \quad \theta \in \arg(f(z)).$$
> Thus, $f(z)$ is of the form $f(z) = r(z)e^{i\theta}$ for some fixed $\theta \in \mathbb{R}$ and some function $r : D \to (0, \infty)$.

অর্থাৎ, z বদলালেও $f(z)$ সর্বদা Fig 12-এর লাইনটা বরাবর origin থেকে কাছে বা দূরে যাবে। Origin থেকে এই দূরত্বটাকেই $r(z)$ নাম দিয়েছি।

> Let $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ where $x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$.
>
> So $u(x, y) = r(x, y)\cos\theta$ and $v(x, y) = r(x, y)\sin\theta$.
>
> Since f is differentiable, hence $u(x, y)$, $v(x, y)$ are differentiable. Hence $r(x, y)$ is also differentiable.
>
> Hence $u_x = r_x \cos\theta,\ u_y = r_y \cos\theta$, and $v_x = r_x \sin\theta,\ v_y = r_y \sin\theta$.
>
> By the Cauchy-Riemann equations, $u_x = v_y$ and $u_y = -v_x$.
>
> So
> $$\begin{aligned} r_x \cos\theta &= r_y \sin\theta \\ r_y \cos\theta &= -r_x \sin\theta. \end{aligned}$$
> Hence $r_x = r_y = 0$.
>
> ⟦ Because:
>
> Case 1: $\cos\theta = 0$: Here $\sin\theta \neq 0$. So $r_y = 0$, and hence $r_x = 0$.
> Case 2: $\cos\theta \neq 0$: Here $r_x = r_y \tan\theta$.
> So $r_y \cos\theta = -r_y \sin\theta \tan\theta$,
> or $r_y \cos^2\theta = -r_y^2 \sin^2\theta$.
> Hence $r_y \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0$, or $r_y = 0$.
> Hence $r_x = r_y \tan\theta 0$.
>
> ⟧
>
> Thus, $r(x, y)$ is a constant function, and hence so is $f(z)$, as required.

■

Example 20: If $f(z)$ and $\overline{f}(z)$ are both analytic in a region then show that $f(z)$ is constant

in that region.[2] **(2014.6di)**
SOLUTION:

> Let $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ where $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$.
> Then $\overline{f}(z) = u(x,y) - iv(x,y)$.
> By analyticity, we see that $u(x,y$ and $v(x,y)$ are differentiable functions.
> By the Cauchy-Riemann equations for f we get $u_x = v_y$ and $u_y = -v_x$.
> Similarly, for $\overline{f}$ we have $u_x = -v_y$ and $u_x = v_y$.
> So we have $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$.
> Hence $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are constant functions.
> Therefore $f(z)$ is a constant function, as required.

■

DAY 17
Cauchy-Riemann equations (part 3)

ধরো, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ যেখানে $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$. আমরা দেখেছি যে, $f(z)$ যদি differentiable হয় তবে $u(x,y)$ আর $v(x,y)$ দুজনে মিলে Cauchy-Riemann equation দুটো পালন করে। এর উল্টো দিকটাও কি ঠিক, মানে Cauchy-Riemann equation দুটো পালিত হলেই কি f-টা differentiable হতে বাধ্য? যদি u, v দুজনেই differentiable হয়, তবে উত্তর হল--হ্যাঁ। কিন্তু যদি u, v যদি differentiable না হয়, তবে উত্তর হবে--না। অর্থাৎ Cauchy-Riemann equation দুটো f-এর differentiability-র জন্য necessary শর্ত মাত্র, sufficient নয়! এবার এই ব্যাপারটা নিয়েই আলোচনা করব।

17.1 Not sufficient

Example 21: Show that $f(z) = \sqrt{|xy|}$ is not analytic at the origin though the Cauchy-Riemann equations are satisfied at that point.[4] **(2007.14a)**
SOLUTION: অংকটার দুটো অংশ। প্রথম অংশে Cauchy-Riemann equation দুটো দেখাতে হবে। তার জন্য $u(x,y)$ আর $v(x,y)$ বার করতে হবে। এখানে $f(z)$-টার মধ্যে কোনো imaginary অংশ নেই, তার মানে এর পুরোটাই $u(x,y)$, আর $v(x,y)$ হল শূন্য।

> First part:
> Here $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, where
> $$u(x,y) = \sqrt{|xy|} \text{ and } v(x,y) = 0.$$

এবার $u_x(0,0)$ বার করব। তার জন্য প্রথমে $u(x,0)$ বার করে সেটাকে x দিয়ে differentiate করতে হবে--

So $u(x,0) \equiv 0$ and hence

$$\begin{aligned} u_x(0,0) &= \frac{d}{dx}u(x,0)\Big|_{x=0} = 0 \\ u_y(0,0) &= \frac{d}{dy}u(0,y)\Big|_{y=0} = 0. \end{aligned}$$

Also $v_x(0,0) = v_y(0,0) = 0$.

So the Cauchy-Riemann equations hold at $z = 0$, because

$$\begin{aligned} u_x(0,0) &= 0 = & v_y(0,0) \\ u_y(0,0) &= 0 = & -v_x(0,0). \end{aligned}$$

এবার দেখাব যে $f(z)$ $z = 0$-তে analytic নয়। আসলে $f(z)$ এখানে differentiable পর্যন্ত নয়, analytic হওয়া তো পরের কথা।

Second part:

We shall show that $f(z)$ is not differentiable at $z = 0$,

ie,

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$$

does not exist in $\mathbb{C}$.

সেই পরিচিত কায়দা আবার কাজে লাগবে, দুদিক থেকে দুটো আলাদা limit পাওয়া--

Let us take $z = x + ix$, with $x \to 0$. Then

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x + ix}.$$

Now

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x + ix} = \frac{1}{1 + i} \text{ but } \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x + ix} = \frac{-1}{1 + i}.$$

Since these two limits are different, $f(z)$ cannot be differentiable at $z = 0$.

So $f(z)$ is not differentiable (and hence not analytic) at $z = 0$.

■

Example 22: Show that the following function f is not differentiable at the origin even though it satisfies Cauchy-Riemann equations there:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0. \end{cases}$$

[5] **(2006.14b)**
SOLUTION: এই অংকটার দুটো অংশ, প্রথমে দেখাতে হবে যে Cauchy-Riemann equation দুটো পালিত হয়। তার পরে দেখাতে হবে যে তা সত্ত্বেও $f(z)$-টা origin-এ differentiable নয়। এর মধ্যে দ্বিতীয় অংশটা আমরা Example 6-এই করেছি।
প্রথম অংশে আমাদের কি কি করতে হবে দেখি--

1. প্রথমে $u(x,y)$ আর $v(x,y)$ বার করতে হবে, $f(z)$-এর real আর imaginary অংশ নিয়ে,
2. এবার $y=0$ বসিয়ে $u(x,y)$ থেকে পাব $u(x,0)$, এবং সেটাকে x-এর সাপেক্ষে differentiate করে পাব $u_x(x,0)$. তাতে $x=0$ বসালে পাব $u_x(0,0)$. একইভাবে $u_y(0,0)$ আর $v_x(0,0), v_y(0,0)$ বার করব।
3. সবশেষে দেখাতে হবে $u_x(0,0)=v_y(0,0)$ আর $u_y(0,0)=-v_x(0,0)$.

> <u>Cauchy-Riemann equations hold:</u>
>
> Here $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, where
>
> $$u(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
>
> and
>
> $$v(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

এবার $u_x(0,0), u_y(0,0)$ ইত্যাদি বার করব--

> So $u(x,0)\equiv 0$ and $u(0,y)\equiv 0$.
> Hence $u_x(0,0)=u_y(0,0)=0$.
> Similarly, $v(x,0)\equiv 0$ and $v(0,y)\equiv 0$.
> Hence $v_x(0,0)=v_y(0,0)=0$.

দেখাই যাচ্ছে যে Cauchy-Riemann equation দুটো এখানে hold করে--

> So
>
> $$\begin{aligned} u_x(0,0) &= v_y(0,0)\\ u_y(0,0) &= -v_x(0,0). \end{aligned}$$
>
> Thus the Cauchy-Riemann equations hold at $z=0$.

■

একইরকম আরো কয়েকটা অংক দিলাম নীচের তোমার নিজে নিজে করার জন্য।

Exercise 19: Let

$$f(z)=u+iv=\begin{cases}\frac{x^2y^5(x+iy)}{x^4+y^{10}} & \text{if } z\neq 0\\ 0 & \text{if } z=0\end{cases},$$

where $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Show that the real valued functions u and v satisfy Cauchy-Riemann equations at the origin but $f'(0)$ does not exist.[3+2] **(2017, 2009)** ■

Exercise 20: Prove that the function

$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{if } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

satisfies Cauchy-Riemann equations at the origin, but $f'(0)$ does not exist. $(x, y \in \mathbb{R})$.[3+2] **(2013.6c)** ■

Exercise 21: Considering

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases}$$

show that validity of Cauchy-Riemann equations at a point does not ensure the existence of f at that point.[5] **(2008.14b)**
HINT: দ্যাখাও যে, origin-এ Cauchy-Riemann equation দুটো পালিত হয়, কিন্তু $f'(0)$-টা exist করে না। ■

এবার একটা প্যাঁচের অংক করব। এর জন্য একটা জিনিসের দিকে তোমার দৃষ্টি আকর্ষণ করি। Real analysis শেখার সময়ে আমরা শিখি $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$. কিন্তু complex analysis-এর বেলাতেও কি $\lim_{z\to\infty} e^z$ শূন্য হবে? না, হবে না। কারণ ওই যে আমরা শিখেছি ∞-টা $\mathbb{C}$-এর বেলায় চতুর্দিকে ছড়িয়ে আছে। কোন দিক দিয়ে ∞-র কাছে যাচ্ছ, তার উপর নির্ভর করে e^z বিভিন্ন আচরণ করবে। যদি positive real axis বরাবর যাও মানে $z = x \in \mathbb{R}$ নিয়ে $x \to \infty$ করো, তবে $e^z \to \infty$ হবে। কিন্তু যদি negative real axis বরাবর যাও মানে $z = x \in \mathbb{R}$ নিয়ে $x \to -\infty$ করো, তবে $e^z \to 0$ হবে! সুতরাং $\lim_{z\to\infty} e^z$ আসলে exist করে না! এই কথাটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা করো।

Example 23: Show that the function

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z^{-4}} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases}$$

is not differentiable at 0 although f satisfies the Cauchy-Riemann equations at 0.[3+2] **(2015.6c)**
SOLUTION:

> Step 1: Cauchy-Riemann equations:
>
> Let $z = x + iy$, where $x, y \in \mathbb{R}$.

এখানে প্রথমে $u(x,y)$ আর $v(x,y)$ বার করে তারপরে $u_x(0,0)$, $v_x(0,0)$ ইত্যাদি বার করতে গেলে অনেকটা খাটতে হবে। তার চেয়ে বুদ্ধিমানের কাজ হবে সরাসরি $u(x,0)$, $v(x,0)$ ইত্যাদি বার করে differentiate করা।

> Here
>
> $$u(x,0) = \begin{cases} e^{-x^{-4}} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

> and $v(x, 0) = 0$.

এখানে $v(x, 0) = 0$ হল, কারণ $f(x + 0i)$-এর মধ্যে কোনো imaginary অংশ নেই।

> Also
> $$u(0, y) = \begin{cases} e^{-y^{-4}} & \text{if } y \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
> and $v(0, y) = 0$.
> Clearly, $u_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{xe^{x^{-4}}} = 0$.
> Similarly, $u_y(0, 0) = 0$.
> So $u_x = v_y$ and $u_y = -v_x$ at $(0, 0)$.
> Thus the Cauchy-Riemann equations hold.

এর পরে দেখাতে হবে যে $f(z)$-টা 0-তে differentiable নয়। সরাসরি সংজ্ঞা দিয়ে দেখানো চেষ্টা করি--

> $$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{e^{-z^{-4}}}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{ze^{z^{-4}}}.$$

এবার একটা কৌশল করব (যেটা ভেবে বার করতে বেশ কয়েকবার এদিক ওদিক ঢুঁ মারতে হয়েছে)। কৌশলটার পিছনে মূল ধারণাটা হল যখন $z \to 0$ হবে তখন $z^{-4} \to \infty$ হবে। কিন্তু সেখান থেকে তো আর বলতে পারি না যে $e^{z^{-4}} \to \infty$ হবে! আমরা আবার সেই পুরোনো কায়দা লাগাব, দুদিক বরাবর গিয়ে দুরকম limit পাওয়া। আমরা এমনভাবে দুটো দিক নেব, যাতে একভাবে z^{-4}-টা positive real axis বরাবর ∞-তে যায়, আর অন্যভাবে negative real axis বরাবর $-\infty$-তে যায়। প্রথমটার জন্য $z = x \in \mathbb{R}$ নিয়ে $x \to 0+$ করলেই হবে--

> Taking $z = x \in \mathbb{R}$ and letting $x \to 0+$ we have
> $$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{xe^{x^{-4}}} = 0.$$

অন্য দিকটা এমনভাবে নিতে হবে যাতে z^{-4} হয় negative real সংখ্যা, মানে z^4 হয় একটা negative real সংখ্যা। এরকম সংখ্যারা সবাই $(1 + i)t$ আকারের হয় (যেখানে $t \in \mathbb{R}$)। এটা যদি অদ্ভুত লাগে তবে argument দিয়ে ভাবো। Negative real সংখ্যাদের একটা argument হল $180°$. আর $\arg(z^4) = 4 \arg(z)$. সুতরাং $\arg(z)$-কে হতে হবে $\frac{1}{4} \times 180° = 45°$. অর্থাৎ z-কে $45°$ লাইনের উপর থাকতে হবে, মানে $(1 + i)t$ আকারের হতে হবে।

Fig 13

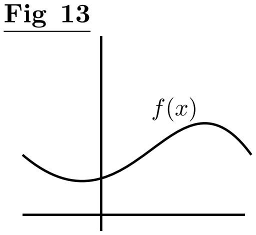
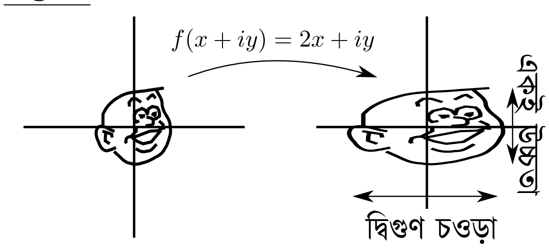


Fig 14



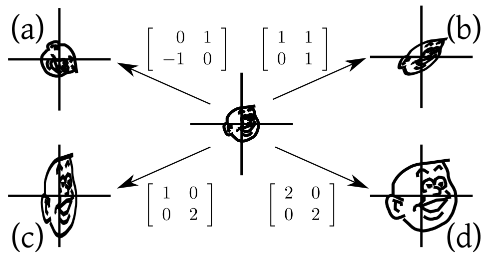


Fig 15

> Taking $z = (1+i)t$ with $t \in \mathbb{R}$ and letting $t \to 0$ we have
>
> $$\lim_{t\to 0} \frac{1}{(1+i)te^{(1+i)^4 t^{-4}}} = \infty,$$
>
> since $(1+i)^4$ is a negative real number.

ব্যস্, দুদিক থেকে দুরকম limit পেয়ে গেছি। অতএব--

> Hence $f(z)$ is not differentiable at the origin.

অবশ্য খালি $z = (1+i)t$ অংশটা করলেই চলত, কারণ অন্ততঃ একদিকের limit-টা finite না হলেই differentiable হবে না। ■

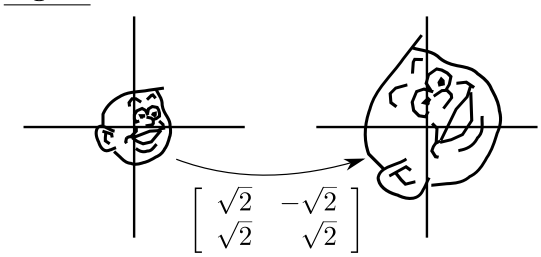
নীচের অংকটা তোমার জন্য রেখে দিলাম।

Exercise 22: Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be defined by

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases} .$$

Show that f satisfies Cauchy-Riemann equations at $z = 0$ but the derivative of f fails to exist there.[5] **(2012.12b)** ■

Fig 16



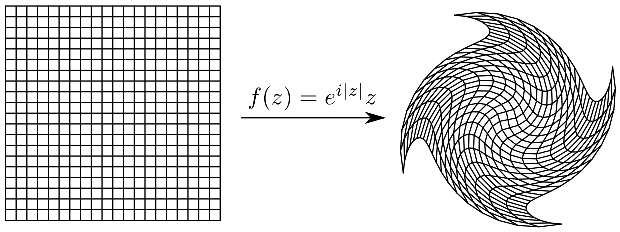


Fig 17

17.2 ছবি দিয়ে ভাবা

এবার একটা জিনিস আলোচনা করব, যেটা পরীক্ষার কাজে হয়তো লাগবে না, কিন্তু complex analysis-এর মর্ম উপলব্ধি করতে কাজে দেবে। ব্যাপারটা হল--কোনো একটা $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ দেওয়া থাকলে সেটা differentiable হওয়া মানেটা কী? সংজ্ঞার কথা বলছি না, সে তো শিখেইছি। এখানে আমি ব্যাপারটা ছবি দিয়ে ভাবার কথা বলছি। যেমন ধরো, যদি $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ হত, আর তার গ্রাফটা হত Fig 13-এর মত, তবে সেটা দেখেই বলা যেত যে $f(x)$-টা differentiable, কারণ কোথাও কোনো ভাঙা বা খোঁচ নেই, এবং tangent কোথাও vertical হয়ে যায় নি। সেইরকম কোনো কিছু কি complex function-দের বেলায় বলা যায়? উত্তর হল, হ্যাঁ সেইরকম একটা কায়দা আছে বটে। তার প্রধান হাতিয়ার আমাদের পরিচিত Cauchy-Riemann equation দুটো। এবার আমরা এই হাতিয়ার দুটোকে ছবি দিয়ে হজম করার চেষ্টা করব। কাজটা ধাপে ধাপে ভেঙে করলে তোমার পাকস্থলী কম বিপাকে পড়বে।

17.2.1 প্রথম ধাপ

একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করা যাক।

Example 24: ধরো তোমাকে $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ দিলাম এইরকম-- $f(x+iy)=2x+iy$. (এখানে $x,y\in\mathbb{R}$)। এটাকে ছবি দিয়ে ভাবতে হবে। কী করে?

SOLUTION: এখানে $f(x+iy)=2x+iy$-এর real অংশ হল $2x$, যেটা $x+iy$-এর real অংশের দ্বিগুণ। ওদিকে $f(x+iy)$-এর imaginary অংশটা হল y, যেটা $x+iy$-এর imaginary অংশের সমান। সুতরাং যদি তুমি $\mathbb{C}$-এর উপরে যা খুশি কোনো ছবি নাও, তবে f লাগালে পরে ছবিটা horizontal দিকে দ্বিগুণ চওড়া হয়ে যাবে, কিন্তু vertical দিকে একইরকম থাকবে (Fig 14)। ■

লক্ষ করো f লাগানোর ফলে real আর imaginary অংশের পরিবর্তনটাকে আমরা একটা 2×2 সাইজের matrix দিয়ে গুণ বলে ভাবতে পারি। প্রথমে real অংশটা ছিল x আর imaginary অংশটা ছিল y. এদেরকে খাড়া করে লিখলে হয় $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. এর উপরে f লাগানোর পরে পাচ্ছি

$$\begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Fig 18

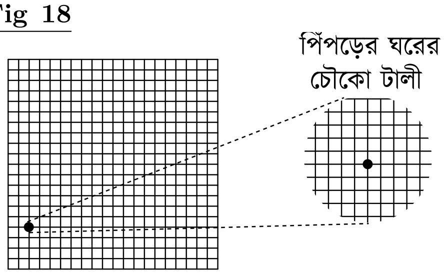
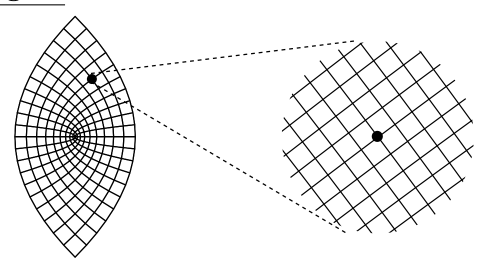


Fig 19



বুঝতেই পারছ এই matrix-টাকে নানারকম নিলে ছবিটাও নানাভাবে পালটাবে। কিছু উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 15-এ।

17.2.2 দ্বিতীয় ধাপ

কিছু কিছু matrix আছে যাদের ফলে ছবিটা বিকৃত হয়ে যায়, যেমন হয়েছে Fig 15-এর (b) আর (c)-তে। আবার কিছু কিছু matrix-এর বেলায় বিকৃত হয় না, খালি হয়তো ছোটো বড় হয়, বা খানিকটা ঘুরে যায়, যেমন (a) আর (d)-তে। এরকম ভদ্র matrix-দের মধ্যে প্রথমেই আসে identity matrix-এর কথা, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. এর ফলে কিছুই বদলায় না। আবার যদি matrix-টা নিই $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, তবে পুরো ছবিটা দ্বিগুণ বড় হয়ে যাবে (Fig 15(d)), সব দিকেই দ্বিগুণ হবে, তাই বিকৃত হবে না। এবার একটা জটিলতর ভদ্র matrix দেখাই--

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

এর প্রভাব দেখিয়েছি Fig 16-এ। এখানেও কোনো বিকৃতি নেই, খালি বড় হয়ে গেছে আর ঘুরে গেছে, এই যা। গণিতজ্ঞরা গবেষণা করে দেখেছেন যে, এরকম ভদ্র matrix-দের সর্বদা একটা বিশেষ চেহারা হয়--

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$ (এবং অন্ততঃ একজন $\neq 0$, কারণ নইলে তো পুরো matrix-টাই শূন্য হয়ে যাবে!)। বিপরীতপক্ষে এই চেহারার matrix-রা সকলেই ভদ্র হয়, অর্থাৎ ছবিটাকে কখনো বিকৃত করে না। এই ব্যাপারটা কিছু উদাহরণ নিয়ে খেলা করলে নিজেই উপলব্ধি করতে পারবে।

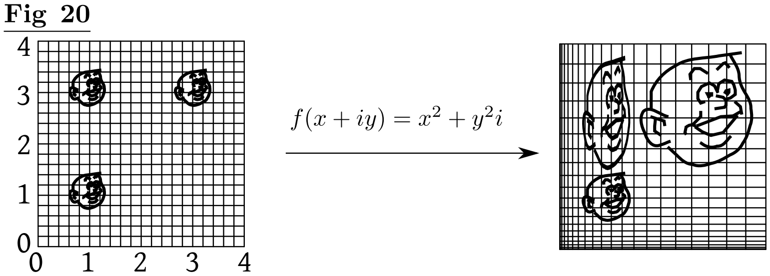
17.2.3 তৃতীয় ধাপ

এতক্ষণ আমরা সেই সব $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ নিয়ে কাজ করছিলাম, যেগুলোকে matrix দিয়ে লেখা যায়, মানে এইরকম--

$$f(x + iy) = (ax + by) + i(cx + dy), \qquad (*)$$

যেখানে $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. এদের মধ্যে কেউ কেউ ভদ্র, কেউ বা ছবিটাকে বিকৃত করে। কিন্তু এদের সবার বেলাতেই একটা জিনিস সত্য, যাই করুক সেটা পুরো $\mathbb{C}$-এর উপরেই সর্বত্র একইভাবে করে, তাই সরলরেখারা সরলরেখাই থাকে, এবং parallel লাইনরাও parallel-ই থাকে। কিন্তু যদি $f(z)$-এর চেহারাটা (*)-এর মত না হয়, তবে ব্যাপারটা আরো ভয়ানক। তখন $\mathbb{C}$-এর একেক জায়গায় একেকরকম কাণ্ড হয়, কোথাও হয় তো মোটা হয়ে গেল, তো আরেক জায়গায় চিম্‌সে গেল, এখানে 30° বাঁদিকে ঘুরল তো অন্য কোথাও 50° ডানদিকে। সরলরেখারা বেঁকে যেতে পারে, parallel লাইনরা আর parallel নাও থাকতে পারে। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 17-এ। সৌভাগ্যক্রমে এরকম গোলমেলে function-দের সামাল দেবার জন্য গণিতজ্ঞরা একটা চমৎকার কায়দা বার করেছেন। ব্যাপারটা অনেকটা chemistry-র মত। চারধারে যতই আশ্চর্য আশ্চর্য জিনিস দ্যাখো না কেন, যদি তোমার দৃষ্টিকোণকে কমাতে কমাতে একেবারে পারমাণবিক পর্যায়ে নিয়ে ফেলতে পারো, তবে সব কিছুই আসলে কয়েকটা মাত্র মৌলিক পদার্থ দিয়ে তৈরী! Complex analysis-এর বেলাতে এই ধারণাটা কী করে কাজ করে বলি--

Fig 20



> $\mathbb{C}$ একটা মস্ত বড় মাঠের মত। সেখানে $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$-কে একটা ভূমিকম্প বলে ভাবো, যার ফলে প্রতিটা z বিন্দু গিয়ে পড়বে $f(z)$-এ। ধরো একটা পিঁপড়ে থাকে $\mathbb{C}$-এর কোনো একটা বিন্দুতে (Fig 18)। বোঝার সুবিধার জন্য complex plane-টাকে গ্রাফ কাগজের মত করে দেখিয়েছি। পিঁপড়েটা কোথায় থাকে সেটাও দেখিয়েছি। পিঁপড়েটা অবশ্য খুবই ছোট্টো, পুরো complex plane-টার ব্যাপারে ওর কোনো ধারণাই নেই। ওর ঘরের মেঝেতে যে ছোটোছোটো চৌকো টালী পাতা আছে, সেটা বড় করে দেখিয়েছি। এবার যদি $f(z) = z^2$ দিয়ে ভূমিকম্প ঘটে, তবে complex plane-টা বেঁকেচুরে যাবে, ফলে Fig 18-র square-টা দুমড়ে মুচড়ে হয়ে যাবে Fig 19-এর মত। কিন্তু পিঁপড়েটা কী দেখবে? সেটাও বড় করে দেখিয়েছি Fig 19-এ। লক্ষ করো পিঁপড়েটার চোখে কিন্তু মোটেও দোমড়ানো বলে মনে হচ্ছে না। সরলরেখাগুলো যেন সোজাই রয়েছে, এবং parallel লাইনরাও parallel-ই রয়েছে যেন।

যদি আমার কথা বিশ্বাস না হয়, তবে তোমার পায়ের নীচে পৃথিবীটার দিকে তাকিয়ে দ্যাখো, বেশ সমতল মনে হচ্ছে, না? অথচ আসলে তো পৃথিবীটা গোল! কিন্তু মস্ত বড় পৃথিবীটার তুলনায় আমরাও এককেটা ছোট্টো পিঁপড়ের মত, তাই অল্প পরিসরের মধ্যে বাঁকা জিনিসকে সোজা বলে মনে হচ্ছে।
তার মানে পিঁপড়ের চোখে f-টাকে একটা matrix দিয়ে গুণ বলেই মনে হবে। গণিতজ্ঞরা এই matrix-টার ফর্মুলাও বার করে ফেলেছেন। যদি $f(x+iy)$-কে $u(x,y)+iv(x,y)$ আকারে লেখো, আর পিঁপড়েটা থাকে (a,b) বিন্দুতে, তবে matrix-টা হবে

$$\left[\begin{array}{cc} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{array}\right].$$

একটা উদাহরণ দেখলে সুবিধা হবে।

Example 25: ধরো $f(x+iy) = x^2+iy^2$. তিনটে পিঁপড়ে রয়েছে $(1,1)$, $(3,3)$ আর $(1,3)$ বিন্দুতে। এদের চোখে f-টা কেমন ঠেকবে বার করো।
SOLUTION: এখানে $u(x,y) = x^2$ আর $v(x,y) = y^2$. তাই matrix-এর general চেহারাটা হল--

$$\left[\begin{array}{cc} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{array}\right].$$

পিঁপড়ে তিনটের কাছে এই matrix-টা হবে

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{array}\right] \text{ এবং } \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{array}\right].$$

তাই প্রথম পিঁপড়েটার কাছে মনে হবে যেন সব কিছুই দ্বিগুণ হয়ে গেছে। দ্বিতীয় পিঁপড়েটা ভাববে সব কিছুই 6 গুণ হয়ে গেছে। তিন নম্বর পিঁপড়েটা দেখবে horizontal দিকে দ্বিগুণ আর vertical দিকে 6 গুণ। ছবি দিয়ে দেখিয়েছি Fig 20-এ। ■

17.2.4 চতুর্থ ধাপ

এইবার মনে করো $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$. ধরো, এই function-টা কোনো একটা (a,b) বিন্দুতে Cauchy-Riemann equation দুটো পালন করে। তার মানে আর কিছুই নয়, সেই বিন্দুতে matrix-টার ভদ্র চেহারা হয়, কারণ matrix-টা হয়

$$\left[\begin{array}{cc} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} u_x(a,b) & -v_x(a,b) \\ v_x(a,b) & u_x(a,b) \end{array}\right],$$

যেটা $\left[\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array}\right]$ চেহারার। সুতরাং Cauchy-Riemann equation দুটো পালন করা মানে সেই বিন্দুতে f কোনো বিকৃতির সৃষ্টি করে না। অবশ্য এর একটাই ব্যতিক্রম আছে। সেটা হল যদি $a = b = 0$ হয়ে যায়, মানে যদি $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ হয়। কিন্তু তা যদি না হয়, তবে f-এর ফলে সেই বিন্দুতে কোনো বিকৃতি আসতে পারে না, খালি ছোটো বড় হতে পারে, বা কিছুটা ঘুরে যেতে পারে।

Example 26: Fig 20 দেখে বলো তো তিনটে পিঁপড়ের মধ্যে কার কার বেলায় Cauchy-Riemann equation দুটো পালিত হচ্ছিল? ছবি দিয়ে ভেবে বল।

SOLUTION: খালি প্রথম দুজনের বেলায়, কারণ ওদের বেলায় কোনো বিকৃতি আসে নি, খালি বড় হয়ে গিয়েছিল, এই যা। তিন নম্বর পিঁপড়েটার ক্ষেত্রে কিন্তু ছবিটা বিকৃত হয়ে গিয়েছিল, কারণ horizontal আর vertical দিকে আলাদা আলাদা পরিমাণ প্রসারিত হয়েছিল। তাই জোর দিয়ে বলতে পারি যে ওখানে Cauchy-Riemann equation দুটো পালিত হয় নি। ■

17.2.5 পঞ্চম ধাপ

আমরা একটা ভাষা বার বার ব্যবহার করছি--"বিকৃত হওয়া বা না হওয়া"। যখন বলছি বিকৃত হয় নি, তার মানে খালি ছোটো বড় হয়েছে বা ঘুরে গেছে। এইরকম পরিবর্তনকে জ্যামিতি দিয়ে প্রকাশ করার একটা কায়দা আমরা স্কুলে থাকতেই শিখেছি। সেটা একটু মনে করে নিই। যদি একটা ত্রিভুজকে সব দিকে সমান করে ছোটো বড় করা হয়, বা ঘোরানো হয়, তবে সেই পরিবর্তনের পরেও ত্রিভুজটার কোনো বৈশিষ্ট্যগুলো অপরিবর্তিত থাকে? উত্তর হল--কোণগুলো। এটা শুধু ত্রিভুজ বলেই নয়, যেকোনো আকারের বেলাতেই খাটে। তাই আমরা বলতে পারি যে, কোনো বিন্দুতে $f(z)$ যদি Cauchy-Riemann equation দুটো পালন করে, তবে f লাগালে পরে সেই বিন্দুতে কোণগুলো বদলাবে না (যদি না f' সেখানে 0 হয়ে যায়)। অংকের ভাষায় এই রকম পরিবর্তনকে বলে **conformal** (কন্‌ফর্মাল)।

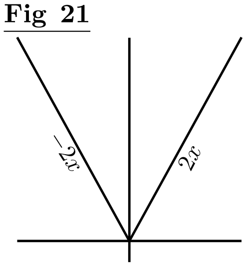
বাস্তব জীবনে অনেক কিছুই আছে, যারা conformal হয়। যেমন ধরো একটা নদী দিয়ে জল বয়ে যাচ্ছে। এই নদীর জলে একটা ছোটো পাতা ফেলে দিলে সেটাও স্রোতের সাথে এগোতে থাকবে। যখন পাতাটা (x, y) বিন্দুতে আছে তখন পাতাটার গতিবেগ যদি $f(x, y)$ হয়, তবে f-টাকে $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ একটা function বলে ভাবা যায়। যদি নদীর জলে কোনো ঘূর্ণি না থাকে, তবে এই f-টা conformal হতে বাধ্য, তা সে চলার পথে যতই পাথর থাকুক না কেন! এইটা হল physics-এর জগতে complex analysis-এর একটা প্রয়োগ। যাই হোক, আমরা এই বইতে এ নিয়ে আর মাথা ঘামাবো না। যদি এ বিষয়ে আরো জানতে চাও তবে Lester Rubenfeld-এর লেখা A First Course in Applied Complex Variables বইটা[2] দেখতে পারো।

DAY 18
Differentiable function-দের কিছু ধর্ম

Real function-দের differentiability আর complex function-দের differentiability-র মধ্যে একটা আশ্চর্য পার্থক্য আছে। Real function-এর জগতে এমন function সম্ভব যেটা $\mathbb{R}$-এর সর্বত্রই differentiable হলেও twice differentiable নয়। কিন্তু complex function-এর বেলায় এমনটা হবার জো নেই, যদি $\mathbb{C}$-এর উপর একবার differentiable হয়, তবে দুবারও হবে। শুধু দুবার কেন, তিনবার চারবার যতবার চাও, ততবারই differentiate করতে পারবে। এই কথাটাই গুছিয়ে লিখেছি নীচের theorem-টাতে।

[2] খুব সম্ভবতঃ আমাদের দেশে বইটার কোনো সুলভ সংস্করণ বাজারে পাওয়া যায় না। Internet-এ খুঁজলে পাবে।

Fig 21



THEOREM

Let D be any open subset of $\mathbb{C}$ and let $f : D \to \mathbb{C}$ be differentiable everywhere on D. Then f is differentiable infinitely often on D.

এটা প্রমাণ করার জন্য আমাদেরকে complex integration ব্যবহার করতে হবে। সেটা আমরা শিখব পরবর্তী দুই অধ্যায়ে, তাই প্রমাণটাও ততক্ষণ স্থগিত রাখতে হবে। আপাততঃ একটা উদাহরণ দেখি real analysis থেকে।

Example 27: ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হল $f(x) = x|x|$. দেখাও যে, $f(x)$-টা সর্বত্রই differentiable, কিন্তু f-টা $x = 0$-তে twice differentiable নয়, অর্থাৎ $f'(x)$ মোটেই $x = 0$-তে differentiable নয়।

SOLUTION: এখানে $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ x^2 & \text{if } x > 0 \end{cases}$.

দেখাই যাচ্ছে যে, $x < 0$ হলে $f'(x) = -2x$, এবং $x > 0$ হলে $f'(x) = 2x$. মাথা ঘামাতে হবে $x = 0$ নিয়ে।

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0-} (-x) = 0.$$

আবার

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0+} x = 0.$$

যেহেতু left hand limit আর right hand limit দুজনেই 0 হল, তাই আমরা বলতে পারি যে $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, অর্থাৎ $f'(0) = 0$. সব মিলিয়ে দাঁড়ালো

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 2x & \text{if } x > 0 \end{cases}.$$

Fig 21-র মত গ্রাফটা আঁকলেই দেখবে 0-তে একটা খোঁচ আছে, তাই সেখানে $f'(x)$ মোটেই differentiable হবে না। ■

এইরকম কোনো উদাহরণ কিন্তু complex analysis-এর বেলায় সম্ভব নয়। সেটাই হল আমাদের theorem-টার বক্তব্য। ভালো করে theorem-টা পড়ে নাও, তারপর নীচের ঠকানো প্রশ্নটার উত্তর দাও।

Exercise 23: কোনো একটা $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ আর একটা $a \in \mathbb{C}$ দেওয়া আছে। এদের বিষয়ে দুটো বাক্য দিচ্ছি, ঠিক না ভুল বলতে হবে--

- এক, যদি f-টা a-তে differentiable হয়, তবে $f'(z)$-ও $z = a$-তে differentiable হবেই।
- দুই, যদি f-টা a-তে analytic হয়, তবে $f'(z)$-ও $z = a$-তে analytic হবেই।

■

এই যে theorem-টা আমরা শিখলাম, তার কিছু প্রয়োগ এবার আমরা দেখব। ধরো $D \subseteq \mathbb{C}$ একটা open set এবং $f : D \to \mathbb{C}$ হল D-এর সর্বত্র differentiable. যদি $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ লিখি, তবে--

- $u(x, y)$ আর $v(x, y)$-ও differentiable হবে।

- আবার আমরা এটাও দেখেছি যে, $f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$ হয়। যেহেতু আমাদের theorem-টা বলছে যে f' নিজেই আবার differentiable, তাই f'-এর উপর ফের একই যুক্তি খাটানো যায়। তা থেকে পাবে u_x, u_y আর v_x, v_y-ও differentiable.
- এইভাবে চলতে চলতে সিদ্ধান্ত করা যায় যে, u, v-এর যাবতীয় order-এর partial derivative-ই exist করে এবং differentiable হয়।

এটা একটা theorem হিসেবে লিখে রাখি।

THEOREM

Let D be any open subset of $\mathbb{C}$ and let $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ be differentiable everywhere on D, where $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$. Then u and v have partial derivatives of all orders, and the partial derivatives are all differentiable.

Calculus of several variables-এ একটা theorem আছে[3] যেটা বলে $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ যদি এমন হয় যে u_x আর u_y দুটোই exist করে এবং differentiable হয়, তবে $u_{xy} = u_{yx}$ হতে বাধ্য। মানে, আগে x-এর সাপেক্ষে differentiate করেছ নাকি y-এর সাপেক্ষে, তাতে কিছু এসে যায় না। আমাদের বেলায় u_x, v_x, u_y এবং v_y সকলেই differentiable. অতএব পাচ্ছি নীচের theorem-টা।

THEOREM

Let D be any open subset of $\mathbb{C}$ and let $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ be differentiable everywhere on D, where $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$. Then $u_{xy} = u_{yx}$ and $v_{xy} = v_{yx}$.

এই অব্ধি পড়ে পুরো আলোচনাটাই খালি থিয়োরীর কচকচি মনে হতে পারে। কিন্তু এই আলোচনার ভিত্তিতে এক ধরণের অংক করা যায়, যেটা অন্যভাবে সমাধান করা কঠিন। এবার সেটাই শিখব।
শুনেছি পণ্ডিতেরা কোনো ডাইনোসরের সামান্য একটু হাড়ের অংশ দেখেই প্রাণীটার সম্পর্কে অনেক কিছু বলে দিতে পারেন। মনে করো একটু হাড়ের ফসিল পাওয়া গেল মাটি খুঁড়ে, সেটা দেখে পণ্ডিতদের প্রথম কাজ হল এইটা স্থির করা যে সেটা আদৌ কোনো ডাইনোসরের হাড় হতে পারে কিনা। যদি তাই না হয়, তবে আর ডাইনোসরের পরিচয় নিয়ে দুশ্চিন্তা করে কী লাভ হবে! আমাদের প্রথম উদাহরণটাও সেইরকম।

Example 28: একটা $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ দিচ্ছি, $u(x,y) = x^2 + y^2$. এটা কি কোনো differentiable $f(z)$-এর real অংশ হতে পারে?

SOLUTION: ধরো এরকম $f(z)$ সম্ভব। তার imaginary অংশটার নাম দাও $v(x,y)$. তাহলে Cauchy-Riemann equation দুটো বলছে যে, $u_x = v_y$ আর $u_y = -v_x$ হবে। প্রথম equation-টাকে x-এর সাপেক্ষে partially differentiate করলে পাবে $u_{xx} = v_{yx}$ আর দ্বিতীয়টাকে y-এর সাপেক্ষে partially differentiate করলে পাবে $u_{yy} = -v_{xy}$. যেহেতু $v_{xy} = v_{yx}$, তাই এবার দুটোকে যোগ করলে v-ওয়ালা অংশটা কেটে খালি u-ওয়ালা একটা শর্ত পাবে, $u_{xx} + u_{yy} = 0$. এবার চট্ করে আমাদের $u(x,y) = x^2 + y^2$-এর বেলায় কষে দ্যাখো $u_{xx} = u_{yy} = 2$ পাবে। সুতরাং $u_{xx} + u_{yy} \neq 0$ হচ্ছে। তাই এই $u(x,y)$-টা কোনো differentiable function-এর real অংশ হতেই পারে না! ■

এই অংকটা দেখেই বুঝবে যে, $u_{xx} + u_{yy}$ জিনিসটা বেশ কাজের। এর একটা নাম আছে--

[3] এর প্রচলিত নাম Young's theorem.

DEFINITION: **Laplacian**

For a function $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ its Laplacian is defined as $u_{xx} + u_{yy}$. It is denoted by $\nabla^2 u$.

Exercise 24: If $v(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 + y^2)$, show that v satisfies Laplace's equation.[2] **(2017.6e)**

HINT:
এখানে Laplace's equation বলতে বোঝানো হয়েছে $v_{xx} + v_{yy} = 0$. গায়ের জোরে v_{xx} আর v_{yy} বার করে যোগ করে দিলেই 0 এসে যাবে। ■

আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে $f(z)$ যদি একটা differentiable function হয়, তবে তার real অংশটার Laplacian অবশ্যই 0 হতে বাধ্য। সেই যুক্তিটা বুঝে থাকলে নীচের অংকটাও চোখের পলকে হয়ে যাবে।

Exercise 25: যদি $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ একটা differentiable function হয় তবে প্রমাণ করো যে তার imaginary অংশের Laplacian-ও 0 হতে বাধ্য। ■

যেসব function-এর Laplacian-টা 0 হয়, তাদের নিয়েই নীচের অংকটা।

Example 29: Define a harmonic function. **(2006, 2010, 2016)**

SOLUTION:

> DEFINITION: **Harmonic function**
>
> Let D be any connected open subset of $\mathbb{R}^2$. Let $u : D \to \mathbb{R}$ be any function. It is called harmonic if
>
> - its second order partial derivatives are continuous on D,
> - its Laplacian is zero, ie, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ everywhere on D.

■

এর মধ্যে দ্বিতীয় শর্তটা তো আমাদের পরিচিত। প্রথম শর্তটা কেন চাপানো হয়েছে, সেটা একটু পরেই বুঝতে পারবে। কয়েকটা অংক করে এই সংজ্ঞাটাকে হজম করে নেওয়া যাক।

Example 30: Show that $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$ is a harmonic function.[1] **(2007.13c)**

SOLUTION: আমরা u-কে harmonic দেখাব--

> To show: the second order partial derivatives of u are continuous, and $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

গায়ের জোরে ঘ্যাঁচ্ ঘ্যাঁচ্ করে differentiate করে গেলেই হল--

> Now $u_x = -6xy$. So $u_{xx} = -6y$ and $u_{xy} = -6x$.
> Also, $u_y = 3y^2 - 3x^2$. So $u_{yy} = 6y$ and $u_{yx} = -6x$.
> Clearly, the second order partial derivatives are all continuous.
> Also $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$.

■

Example 31: Find the constant a so that $u(x, y) = ax^2 - y^2 + xy$ is harmonic on $\mathbb{R}^2$. [2] **(2014.6e)**

SOLUTION:

> Here $u_x(x, y) = 2ax + y$. So $u_{xx}(x, y) = 2a$ and $u_{xy}(x, y) = 1$.
> Also, $u_y(x, y) = -2y + x$. So $u_{yx}(x, y) = 1$ and $u_{yy}(x, y) = -2$.
> Clearly, the second order partial derivatives are all continuous.
> We need $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$, ie, $2a - 2 = 0$.
> Hence $a = 1$.

■

একইরকম আরো কয়েকটা অংক তোমার করার জন্য দিলাম।

Exercise 26: Show that $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, where $(x, y) \neq (0, 0)$, is harmonic.[1] **(2016.6e)** ■

Exercise 27: Prove that $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ is a harmonic function on $\mathbb{R}^2$.[2] **(2012.12e)** ■

Exercise 28: Prove that $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ $[x, y \in \mathbb{R}]$ is a harmonic function on $\mathbb{R}^2$.[2] **(2013.6e)** ■

Complex analysis-এ harmonic function-দের গুরুত্ব হল নীচের theorem-টার জন্য।

> THEOREM
>
> Let D be any connected open subset of $\mathbb{R}^2$. Let $u : D \to \mathbb{R}$ be any function. It is the real part of an analytic complex function on D if and only if $u(x, y)$ is harmonic.

বস্তুতঃ এই theorem-টার কথা ভেবেই আমরা harmonic function-এর সংজ্ঞার প্রথম শর্ত বানিয়েছিলাম। এই theorem-টাই হল সেই হাড়-দেখে-ডাইনোসর বার করার গল্প। এখানে হাড় মানে হল একটা $u(x, y)$. যেই কেউ তোমাকে একটা

$u(x, y)$ দেবে অমনি তুমি চট্ করে দেখে নেবে সেটা harmonic হচ্ছে কিনা। যদি না হয় তো সেটা ডাইনোসরের হাড় নয়, মানে কোনো complex differentiable function-এর real অংশ হতে পারে না। এইটাই হল theorem-টার only-if দিকটা। এর প্রমাণটা আমরা বিভিন্ন উদাহরণের মাধ্যমে একটু আগেই আলোচনা করেছি। কিন্তু যদি $u(x, y)$-টা harmonic হয়ে যায়, তবে অতি অবশ্যই সেটা ডাইনোসরের হাড়। এবং সেই ডাইনোসরের হদিশও বার করে ফেলা সম্ভব। বস্তুতঃ সেইভাবেই theorem-টার if অংশটার প্রমাণ করা হয়। আমরা এবার এই ডাইনোসর বার করাই শিখব, কিছু উদাহরণের মাধ্যমে।
উদাহরণগুলোতে একটা করে $u(x, y)$ দেওয়া থাকবে যেটা harmonic. তা থেকে তোমায় এমন একটা $v(x, y)$ বার করতে হবে, যাতে $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ অবশ্যই differentiable হয়। এরকম নানা $v(x, y)$ সম্ভব। এদের প্রত্যেককেই বলে $u(x, y)$-এর একেকটা **harmonic conjugate--**

DEFINITION: **Harmonic conjugate**

Let D be any region in $\mathbb{R}^2$. Let $u, v : D \to \mathbb{R}$ be two functions. We say that v is a harmonic conjugate of u if
$$u_x = v_y \text{ and } u_y = -v_x$$
everywhere on D.

যেমন ধরো $f(z) = e^z$ হল একটা differentiable function. যেহেতু $f(x+iy) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, তাই এখানে $u(x, y) = e^x \cos y$ এবং $v(x, y) = e^x \sin y$. সুতরাং আমরা বলতে পারি যে, $v(x, y)$ এখানে $u(x, y)$-এর একটা harmonic conjugate. আবার $e^z + 2i$-ও একটা differentiable function. তাই $v(x, y) = 2 + e^x \sin y$-ও ওই একই $u(x, y)$-এর আরেকটা harmonic conjugate.
আমরা আগে যাকে হাড় থেকে ডাইনোসর বার করা বলছিলাম, সেটা তাহলে দাঁড়াচ্ছে একটা harmonic function দেওয়া থাকলে তার harmonic conjugate বার করা। এই কাজের জন্য একটা কায়দা আমাদের বারবার কাজে দেবে। সেটা প্রথমে একটু বুঝে নেওয়া যাক। আমরা হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে শিখে x^3-কে differentiate করলে $3x^2$ হয়। যদি উল্টো প্রশ্নটা করতাম, মানে "কোন্ কোন্ function-কে differentiate করলে $3x^2$ হয়?" জানতে চাইতাম, তবে কিন্তু উত্তর খালি x^3 হত না, উত্তর হত $x^3 + c$, যেখানে c যা খুশি একটা constant. যেমন $x^3 + 5$ বা $x^3 - 4$-কে differentiate করলেও সেই $3x^2$-ই উত্তর আসে। তাই আমরা লিখি
$$\int 3x^2 dx = x^3 + c.$$
একইরকম ব্যাপার আমাদেরকে করতে হবে partial differentiation-এর বেলাতে। একটা উদাহরণ দেখে নিই।

Example 32: এমন কোন্ কোন্ $v(x, y)$ আছে যাতে $v_x(x, y) = yx^2$ হয়?

SOLUTION:এটা একেবারেই $3x^2$-কে integrate করার মতই ব্যাপার, খালি 3-এর জায়গায় y আছে, এই যা পার্থক্য! আমরা এখানে x-এর সাপেক্ষে partial differentiation করছি, তাই y-কে constant ধরব। সুতরাং এখানে উত্তর হবে

$$\int yx^2 dx = \frac{yx^3}{3} + c(y),$$

যেখানে $c(y)$ হল y-এর যা খুশি কোনো function. এই $c(y)$-এর জায়গাটা ভালো করে বুঝে নাও। যেহেতু y-কে constant ধারা হচ্ছে, তাই $c(y)$-টা differentiation-এর সময়ে কেটে যাবে। যেমন $v(x, y) = \frac{yx^3}{3} + y$ বা $v(x, y) = \frac{yx^3}{3} + 5$ বা $v(x, y) = \frac{yx^3}{3} + e^y$ যাই নাও না কেন, $v_x(x, y)$ সব ক্ষেত্রেই yx^2-ই আসবে। ■

এই কথাটা মাথায় রেখে আমরা এবার ডাইনোসর খোঁজা শুরু করব।

Example 33: Show that $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ is a harmonic function. Determine a harmonic

conjugate $v(x,y)$ of $u(x,y)$.[1+3] **(2007.13c)**
SOLUTION: প্রথম অংশ তো একটু আগেই করলাম Example 30-এ। এবার harmonic conjugate বার করার পালা। এখানে একটা কায়দা করব। বোঝার জন্য ধরো $v(x,y)$ হল $u(x,y)$-এর একটা harmonic conjugate. তাহলে $v_y = u_x = -6xy$ আর $v_x = -u_y = 3y^2 - 3x^2$ হবে।

> We shall find a function $v(x,y)$ such that
>
> $$\begin{aligned} v_y &= u_x = -6xy \\ v_x &= -u_y = 3x^2 - 3y^2. \end{aligned}$$

এরকম function বার করা যাবে অনায়াসেই, integrate করে--

> So
>
> $$v(x,y) = \int v_x dx = \int (3x^2 - 3y^2) dx = 3\int x^2 dx - 3y^2 \int dx = x^3 - 3xy^2 + c_1(y), \quad (\mathbf{1})$$
>
> where $c_1(y)$ is any arbitrary function of y.

এবার একই কাজ করব y-এর দিক থেকে--

> Again,
>
> $$v(x,y) = \int v_y dy = -\int 6xy dy = -6x \int y dy = -3xy^2 + c_2(x), \quad (\mathbf{2})$$
>
> where $c_2(x)$ is any arbitrary function of x.

লক্ষ কর যে এবার arbitrary function-টা হল x-এর function. এবার এমন ভাবে $c_1(y)$ আর $c_2(x)$ নিতে হবে যাতে (**1**) আর (**2**) মেলে। একটু ভাবলেই বুঝবে যে $c_2(x) = x^3$ আর $c_1(y) = 0$ নিলে কাজ হবে--

> If we take $c_1 = 0$ and $c_2(x) = x^3$, then we get <u>one</u> harmonic conjugate of $u(x,y)$ as
>
> $$v(x,y) = x^3 - 3xy^2.$$

মনে রেখো যে $c_1(y)$, $c_2(x)$-কে অন্য ভাবেও নেওয়া চলত, যেমন $c_1(y) = 5, c_2(x) = x^3 + 5$. তাতে আমরা অন্য একটা harmonic conjugate $v(x,y)$ পেতাম। বস্তুতঃ, $c_1(y)$ আর $c_2(x)$-এর general রূপ হল $c_1(y) = c$ আর $c_2(x) = x^3 + c$, যেখানে c যা খুশি একটা constant. ■

নীচের অংকগুলোও একইভাবে হবে। তোমার করার জন্য রেখে দিলাম।

Exercise 29: Prove that $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ $[x, y \in \mathbb{R}]$ is a harmonic function on $\mathbb{R}^2$. Find a harmonic conjugate of u.[2+3] **(2013.6e)**
HINT: Exercise 32-এ প্রথম অংশটা করতে দেওয়া হয়েছিল। ■

Exercise 30: If $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, show that there exists a function $v(x,y)$ such that

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

is analytic in a finite region of the complex plane.[3] **(2008.13c)**
HINT: এখানে যদিও $v(x,y)$ বার করতে বলে নি, খালি existence দেখাতে বলেছে, তাও $v(x,y)$ বার করে ফেললেই সুবিধা হবে। ■

Exercise 31: Determine a conjugate harmonic function of the function u, where $u(x,y) = e^x \cos y$ in the complex plane $\mathbb{C}$.[5] **(2006.14c)** ■

Exercise 32: If $u(x,y) = e^x \sin y$, show that there exists a function $v(x,y)$ such that $f(z) = u + iv$ is analytic in a finite region.[5] **(2015.6e)**
HINT: এখানে "finite" শব্দটার কোনো মানে হচ্ছে না। ওই শব্দটা বাদ দিলে অংকটা ঠিক আছে। ■

Exercise 33: Show that $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, where $(x,y) \neq (0,0)$, is harmonic. Find an analytic function $f(z)$ with u as its real part.[1+1+3] **(2016.6e)**
HINT: প্রথম অংশটা করতে বলা হয়েছিল Exercise 30-এ।
দ্বিতীয় অংশে দুখানা integrate করলে দেখবে $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ আর $-\tan^{-1}\frac{x}{y}$ আসছে। মনে রেখো যে, দ্বিতীয়টার সঙ্গে $\frac{\pi}{2}$ যোগ করলেই প্রথমটা আসে। সমস্যা হল x আর y নীচের তলায় এসে যাওয়া নিয়ে। সেটাকে আপাততঃ অগ্রাহ্য করলে $v(x,y) = \arg(z)$ নেওয়া চলত। তার মানে $f(z) = \log|z| + i\arg(z)$, যাকে লেখা যায় $f(z) = \log(|z|e^{i\arg(z)}) = \log z$. অনুমান করা শক্ত নয় যে, অংকটা আসলে $f(z) = \log z$ নিয়ে শুরু করে back-calculate করে বানানো। কিন্তু সেখানে একটা গুরুতর সমস্যা রয়ে গেছে। $\log z$ হল একটা set-valued function. তাই ওটাকে সাধারণ function-এর মত differentiate করা যায় না মোটেই। যদি $f(z) = \text{Log } z$ নেওয়া হয়, তবে সমস্যা মিটে যায়, কিন্তু সেক্ষেত্রে origin-এর সাথে negative real axis-টাকেও বাদ দিতে হবে, কারণ সেখানে Log z-টা continuous পর্যন্ত নয় (differentiable হওয়া তো পরের কথা)। ■

Exercise 34: Find the constant a so that $u(x,y) = ax^2 - y^2 + xy$ is harmonic on $\mathbb{R}^2$. Find an analytic function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ for which u is the real part.[2+3] **(2014.6e)**
HINT: প্রথম অংশটা আমরা Example 31-এই করেছিলাম। সেখানে $a = 1$ পাওয়া গিয়েছিল। এবার বাকি অংশটা করে ফেললেই হবে। ■

Exercise 35: Prove that $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$ is a harmonic function on $\mathbb{R}^2$. Find a harmonic conjugate $v(x,y)$.[2+3] **(2012.12e)**
HINT: এই অংকের প্রথম অংশটার সঙ্গে Exercise 32-এই দেখা হয়েছে। ■

Exercise 36: If $v(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2+y^2)$, show that v satisfies Laplace's equation and find an analytic function of which v is the imaginary part.[2+3] **(2017.6e)**
HINT:
প্রথম অংশ আগেই করতে বলা ছিল Exercise 24-এ। এবার বাকিটুকু করো। ■

এতক্ষণ আমরা $u(x, y)$ থেকে $v(x, y)$ বার করছিলাম। উল্টোটাও একইভাবে করা যাবে Cauchy-Riemann equation দুটো দুটো ব্যবহার করে। সেরকম একটা অংক দিই।

Exercise 37: যদি $v(x, y) = e^x \sin y$ হয় তবে এমন একটা $u(x, y)$ বার করো যাতে $f(x + iy) = u(x, y + +iv(x, y)$-টা $\mathbb{C}$-এর সর্বত্র differentiable হয়। ■

একটা সামান্য অন্য স্বাদের অংক দিয়ে আজকের দিনটা শেষ করি।

Example 34: If $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ and $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, find $f(z)$ in terms of z.[5] **(2011.12e)**

SOLUTION: এখানে u বা v কোনোটাই আলাদা করে বলা নেই। তবে মূল পদ্ধতিটা আগের মতই হবে। প্রথমে $u - v$-কে partially differentiate করে Cauchy-Riemann equation দুটো লাগাব। তাতে পাব $u_x - v_x = v_y + u_y$ আর $u_y - v_y = -v_x - u_x$. লক্ষ করো, দুই ক্ষেত্রেই derivative দুটো $u + v$ দিয়ে লেখা যায়। অতএব--

> Let $F(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$ and $G(x, y) = u(x, y) + v(x, y)$.
> By Cauchy-Riemann equations we know $F_x = u_x - v_x = v_y + u_y = G_y$.
> Also, $F_y = u_y - v_y = -v_x - u_x = -G_x$.

এইবার আমরা integrate করে $G(x, y)$ বার করে ফেলব, মানে $u + v$ বার করব। ওদিকে $u - v$ তো দেওয়াই ছিল। সুতরাং u আর v দুটোই আলাদা করে বেরিয়ে যাবে।

> Thus, $G_x = -F_y = \cdots = 3\,y^2 + 6\,x\,y - 3\,x^2$.
> Integrating w.r.t. x, we have
>
> $$G(x, y) = \int (3\,y^2 + 6\,x\,y - 3\,x^2)dx = 3y^2x + 3x^2y - x^3 + c_1(y),$$
>
> for some function $c_1(y)$.
> Again, $G_y = F_x = -3\,y^2 + 6\,x\,y + 3\,x^2$.
> Integrating w.r.t. y, we have
>
> $$G(x, y) = \int (-3\,y^2 + 6\,x\,y + 3\,x^2)dy = -y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + c_2(x),$$
>
> for some function $c_2(x)$.
> Comparing these two forms, we see $G(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + c$ for some constant c.
> Thus
>
> $$\begin{aligned} u - v &= -y^3 - 3xy^2 + 3x^2y + x^3 \\ u + v &= -x^3 - y^3 + 3xy^2 + 3x^2y. \end{aligned}$$

> Hence
>
> $$\begin{aligned} u &= -y^3+3x^2y \\ v &= -x^3+3xy^2. \end{aligned}$$

এবার একটু সাজিয়ে লিখব--

> So
>
> $$f(z) = u+iv = (-y^3+3x^2y)+i(-x^3+3xy^2) = (-y+ix)^3 = -i(x+iy)^3 = -iz^3.$$

■

Answers

2. না। **6.** কেবল $z=0$-তে। **14.** খালি axis দুটোর উপরে Cauchy-Riemann equation দুটো পালিত হবে। কোথাও analytic নয়। **23.** প্রথমটা ভুল, দ্বিতীয়টা ঠিক। দ্বিতীয়টা যে ঠিক, সেটা সরাসরি theorem-টা থেকেই আসছে। প্রথমটার জন্য একটা counterexample হল $f(z)=|z|^2$. এখানে $f'(0)=0$. কিন্তু $f'(z)$ অন্য কোথাও exist-ই করে না, তাই f'-এর domain হল স্রেফ $\{0\}$. যেহেতু সেটা খালি singleton, তাই কোনো রকম limit নেওয়াই অসম্ভব। কিন্তু তা বলে theorem-টায় ভুল নেই, ওখানে D-কে open ধরা ছিল। এখানে $\{0\}$ মোটেই open নয়।
30. y^3-3x^y. **31.** $e^x\sin y$. **32.** $-e^x\cos y$. **37.** $f(z)=e^z$.

Chapter IV
Contour integration

DAY 19
Contour integration (part 1)

আমরা আগের অধ্যায়ে complex function-দের differentiate করতে শিখেছি। এবার শিখব integrate করা। যে ধরণের integration করা শিখব তাকে বলে **contour integration**. খুঁটিনাটির মধ্যে যাবার আগে মোটামুটি বুঝে নেওয়া যাক, কী করতে চলেছি। আমরা যখন হায়ার সেকণ্ডারীতে প্রথম integration শিখি, তখন আমরা দুই ধরণের integration করতাম-- indefinite আর definite. যেমন, যখন লিখতাম

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c \quad (c \text{ arbitrary}),$$

তখন সেটা ছিল indefinite integral-এর উদাহরণ। এখানে একটা function-কে integrate করে উত্তর পাওয়া যায় একটা function, এবং তার মধ্যে একটা arbitrary constant থাকে। কিন্তু যদি বলি

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 = \frac{7}{3},$$

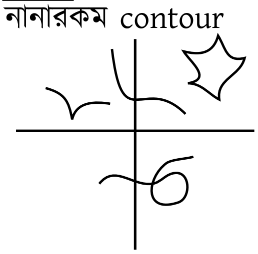
তখন সেটা হল একটা definite integral. এখানে একটা function-কে integrate করা হয় একটা interval-এর উপরে (যেমন এখানে $[1,2]$-এর উপরে করা হয়েছে), আর উত্তরটা হয় একটা সংখ্যা।

Contour integration হল definite integral-এর মত। এখানেও আমাদেরকে দেওয়া থাকবে একটা function (ধরো $f(z)$), তবে সেটা হবে $\mathbb{C}$ থেকে $\mathbb{C}$-তে, মানে $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. আর interval-এর বদলে দেওয়া থাকবে একটা ভদ্রগোছের curve, (যার পোশাকি নাম হল **contour**), মানে complex plane-এর উপরে খানিকটা একটানা আঁচড়। Fig 1 দেখে নাও।

সে একটা কাঠি দিয়ে ঘাসের উপরে লম্বা আঁচড় কেটে বলল, 'এই মনে কর গেছোদাদা।' বলেই খানিকক্ষণ গম্ভীর হয়ে চুপ করে বসে রইল। তারপরে আবার ঠিক তেমনি একটা আঁচড় কেটে বলল, 'এই মনে কর তুমি।' বলে আবার ঘাড় বেঁকিয়ে চুপ করে রইল। তারপরে হঠাৎ আবার একটা আঁচড় কেটে বলল, 'এই মনে কর চন্দ্রবিন্দু।'

--হ য ব র ল

Fig 1
নানারকম contour



আমাদের কাজ হল এই contour-এর উপরে function-টাকে integrate করা। এর ফলে উত্তর আসবে একটা complex সংখ্যা। ব্যাপারটা ধাপে ধাপে শিখব।

19.1 প্রথম ধাপ ($\mathbb{R} \to \mathbb{C}$)

হায়ার সেকণ্ডারীতে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-কে integrate করতাম, আর এখন শিখতে চলেছি $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ নিয়ে কাজ করা। প্রথম ধাপে এর মাঝামাঝি একটা জিনিস নেব, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, যেমন ধরো $f(t) = e^{it}$ বা $f(t) = (t + it^2)^2$, এইরকম। এরকম function-কে আমরা integrate করব কোনো $[a, b]$-এর উপরে, মানে $\int_a^b f(t)dt$ বার করব। একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 1: $f(t) = (t + it^2)^2$ হলে $\int_0^1 f(t)dt$ বার করো।

SOLUTION: প্রথমে $f(t)$-কে real আর imaginary অংশে ভেঙে লেখো--

$$f(t) = (t + it^2)^2 = (t^2 - t^4) + 2t^3 i.$$

সুতরাং এখানে real অংশ হল $t^2 - t^4$ আর imaginary অংশ হল $2t^3$. এবার হায়ার সেকণ্ডারীর মতই integrate করব, খালি i-টা একটা constant বলে integral-এর বাইরে বেরিয়ে যাবে--

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt + i\int_0^1 2t^3 dt = \cdots = \frac{2}{15} + \frac{i}{2}.$$

■

একইভাবে নীচের অংকটা করো দেখি।

Exercise 1: $\int_0^\pi e^{it}dt$ বার করো।
HINT: একটু ধরিয়ে দিচ্ছি, $e^{it} = \cos t + i \sin t$. ■

19.2 দ্বিতীয় ধাপ (contour)

এবার আমরা শিখব complex plane-এর উপরে একটা contour-কে কী করে অংকের ভাষায় প্রকাশ করতে হয়। Parametric curve কাকে বলে সেটা যদি জানা থাকে, তবে ব্যাপারটার মধ্যে নতুনত্ব কিছু নেই। একটু মনে করে নিই।

Example 2: Fig 2-এ যে circle-টা দেখিয়েছি, সেটাকে parametric আকারে লেখো।

SOLUTION: কাজটা নানাভাবে করা যায়, একটা কায়দা হল $(\cos t, \sin t)$ হিসেবে লেখা যেখানে $t \in [0, 2\pi]$. এটাকে মনে করতে পারো এইভাবে--একটা পেন যেন এই circle-টাকে আঁকছে। সময়ের সাথে সাথে পেনটার অবস্থান কীভাবে বদলাচ্ছে parametric form-টা সেটারই বর্ণনা। যেমন t মুহূর্তে পেনটার অবস্থান হল $(\cos t, \sin t)$ বিন্দুতে (Fig 3)। পেন চালানো শুরু হয়েছিল $t = 0$-তে, তখন পেনটা ছিল $(\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$-তে, আর শেষ হয়েছে $t = 2\pi$-তে, তখন পেনটার অবস্থান হয়েছে $(\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$. ■

Fig 2

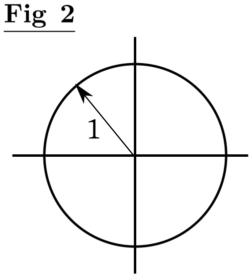


Fig 3

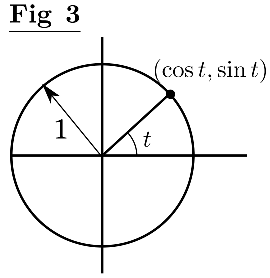
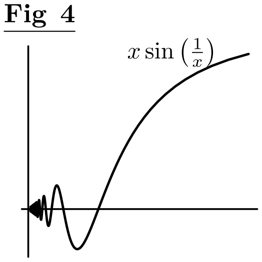


Fig 4



Complex plane-এর বেলাতেও আমরা একই কাজ করব। খালি $(\cos t, \sin t)$ না লিখে $\cos t + i \sin t$ লিখব, এই যা। লক্ষ করো, এইভাবে লিখলে জিনিসটা t-এর একটা function-এ পরিণত হয় $z(t) = \cos t + i \sin t$. এখানে $z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. আগেই বলেছিলাম যে, contour মানে হল complex plane-এর উপর একটানা খানিকটা আঁচড়। অংকের ভাষায় আমরা **contour** বলতে বুঝব কোনো $[a, b]$ থেকে $\mathbb{C}$-তে একটা function. তবে কিনা খালি function বলে ছেড়ে দিলে অনেক বদখত দেখতে জিনিসও ঢুকে পড়তে পারে, যাদেরকে মোটেই একটা আঁচড় বলা যায় না। তাদের নিয়ে অংক কষা ঝকমারি, তাই বাড়তি কিছু ভদ্রতাসূচক শর্ত চাপাতে হবে। আগেই বলেছি যে, আঁচড়টা একটানা হতে হবে, তাই একটা শর্ত তো বোঝাই যাচ্ছে, $z(t)$-কে continuous হতে হবে। কিন্তু বললে বিশ্বাস করবে না, এমন অনেক continuous curve আছে, যাদেরকে তুমি পেন দিয়ে আঁকতে গেলে আঁকা শেষ হবার আগেই কালি ফুরিয়ে যাবে! কারণ এইসব curve-এর দৈর্ঘ্য হল infinite. একটা নমুনা দেখিয়েছি Fig 4-এ। যাই হোক এইসব ঝঞ্ঝাটিয়াদেরকে আমরা সযত্নে এড়িয়ে চলব। এর জন্য contour-এর সংজ্ঞায় একটা বাড়তি শর্ত চাপাব। সব মিলিয়ে সংজ্ঞাটা দাঁড়াবে এইরকম--

DEFINITION: Contour

By a **contour** we shall mean a function $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ (for some $a < b \in \mathbb{R}$) which is continuous and piecewise continuously differentiable, *i.e.*, we can split $[a, b]$ as

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup \cdots \cup [t_{n-1}, t_n],$$

for some $n \in \mathbb{N}$ and $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, so that over each $[t_{i-1}, t_i]$ the function $z(t)$ is continuously differentiable.

বাড়তি শর্তটা দেখতে উপাদেয় নয়। ওটা নিয়ে দুশ্চিন্তা কোরো না। ওর একটা সংক্ষিপ্ত নাম দিয়েছি **piecewise continuously differentiable**. ওই নামটাই আমরা ব্যবহার করব, তাহলে শর্তটা আর বার বার করে লিখে দুঃখ পেতে হবে না।

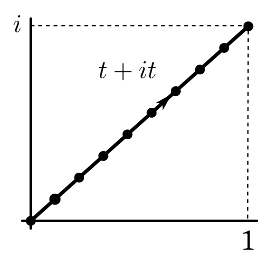
কোনো contour-এর ফর্মুলা দেওয়া থাকলে তা থেকে তার ছবিটা আঁকতে পারলে অনেক সময়ে সুবিধা হয়। সেই কাজটা শিখে রাখা যাক।

Example 3: এই contour-টা ছবিতে কেমন দেখাবে?

$$z(t) = t + it \quad t \in [0, 1].$$

SOLUTION:আঁকা শুরু হচ্ছে $t = 0$-তে, মানে $0 + i0$-তে, অর্থাৎ origin-এ। এবার $t = 0.1$ হলে পেনটা আসছে $0.1 + 0.1i$ বিন্দুতে, $t = 0.2$ হলে $0.2 + 0.2i$-তে, ইত্যাদি। এইভাবে চলতে চলতে $1 + i$-তে এসে contour-টা শেষ হচ্ছে। সব মিলিয়ে ছবিটা দাঁড়াচ্ছে Fig 5-এর মত। পেনটা কীভাবে চলছে সেটার একটা আন্দাজ দেবার জন্য আমরা ডট্ ডট্ এঁকেছি t-এর value-র প্রতি 0.1 অন্তর অন্তর। ■

Fig 5



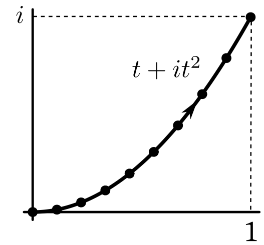


Fig 6

Example 4: আগের অংকটায় যদি $z(t) = t + it^2$ নিতাম, তবে $t \in [0, 1]$-এর জন্য contour-টা কীরকম দেখাত?

SOLUTION: এখানে t মুহূর্তে পেনটা থাকত (t, t^2) বিন্দুতে। তাই ছবিটা হত Fig 6-এর মত $y = x^2$-এর একটা অংশ। ■

Exercise 2: নীচের contour-গুলো খালি হাতে আঁকো। প্রতিক্ষেত্রে তীরচিহ্ন দিতে ভুলো না।

1. $z(t) = e^{it},\ t \in [0, \pi]$.
2. $z(t) = t + i(1 - t),\ t \in [0, 1]$.
3. $z(t) = (1 - t) + it,\ t \in [0, 1]$.
4. $z(t) = 2t + i(1 - 2t),\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

■

19.3 তৃতীয় ধাপ (contour integration)

এবার আমরা আগের ধাপদুটোকে মিলিয়ে contour integration করা শিখব। ব্যাপারটার মধ্যে খুব একটা নতুন কিছু নেই। এর কাছাকাছি একটা জিনিস হায়ার সেকণ্ডারীতেই শিখেছিলে। সেটা আগে একটু মনে করে নিই।

Example 5: ধরো একটা integral দেওয়া আছে, $\int f(x)dx$. যদি $x = \sin t$ বসাই, তবে এর চেহারাটা কেমন দাঁড়াবে?

SOLUTION: আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতে এইভাবে এগোই--যেহেতু $x = \sin t$, তাই $\frac{dx}{dt} = \cos t$. তা থেকে লিখে নিই $dx = \sin t dt$. সুতরাং চট্ করে লিখে ফেলা যায়--

$$\int f(x)dx = \int f(\sin t) \cos t dt.$$

■

ঠিক একইভাবে contour integration-ও করা হয়। সেটাই নীচের অংকে দেখাব।

Example 6: ধরো এই contour-টা দিলাম $z(t) = t + it^2$, যেখানে $t \in [0, 1]$. এর নাম দেওয়া যাক C. তাহলে $\int_C f(z)dz$-কে t-এর integral হিসেবে লেখো। অংকটাকে সহজ রাখার জন্য এখানে $f(z)$-এর কোনো ফর্মুলা দিয়ে দিই নি। উত্তরটা f দিয়েই লিখতে হবে।

SOLUTION: এখানে এইভাবে চিন্তা করো--t-এর প্রতিটা value-তে (মানে প্রতিটা মুহূর্তে) পেনটা আছে $z(t) = t + it^2$-এ। সুতরাং $\frac{dz}{dt} = 1 + 2it$. এটা আমরা সাধারণভাবে differentiate করেই পেয়েছি (i-টা constant বলে বাইরে চলে গেছে)। এ থেকে আমরা লিখব $dz = (1 + 2it)dt$. সুতরাং আমাদের যেটা বার করতে দিয়েছে, সেটাকে t-এর integral হিসেবে লিখলে হয়--

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 f(t + it^2)(1 + 2it)dt.$$

■

এবার তোমার হাত পাকানোর পালা--

Exercise 3: নীচের প্রতিটা ক্ষেত্রে $\int_C f(z)dz$-কে t-এর integral হিসেবে লেখো। এখানে C-কে দেওয়া আছে $z(t)$ হিসেবে।
(i) $z(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$. ($ii$) $z(t) = \frac{1}{it}, \quad t \in [1, 2]$. ■

একটা contour integral-কে t-এর উপর integral হিসেবে লিখতে শিখলে। আর প্রথম ধাপেই আমরা এরকম integral কষতে শিখেছি। সুতরাং জীবনের প্রথম contour integral-টা কষেই ফেলা যাক।

Example 7: $\int_C \frac{dz}{z}$ বার করো, যেখানে C হল এই contour-টা--

$$z(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Contour-টার ছবি এঁকেছি Fig 7-এ। লক্ষ করো t যখন 0 থেকে 2π-এর দিকে যাচ্ছে, ততই পেনটা P থেকে শুরু করে counter-clockwise দিকে এক পাক দিয়ে ফের P-তেই ফিরে আসছে।
SOLUTION: বলাই আছে যে, $z(t) = e^{it}$. তাই $\frac{dz}{dt} = ie^{it}$.
সুতরাং

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

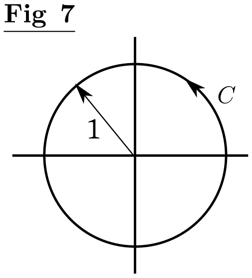
ব্যস্, তোমার জীবনের প্রথম contour integral বার করা হয়ে গেল! ■

এই যে contour integral-টা কষলে, এটার মত গুরুত্বপূর্ণ contour integral গোটা complex analysis-এ আর একটাও নেই। এর এত গুরুত্ব কেন, সেটা পরশু বলব। আপাততঃ আরো কয়েকটা contour integral কষে নাও।

Exercise 4: নীচের প্রতিক্ষেত্রে $\int_C f(z)dz$ বার করো। এখানে C-কে দেওয়া আছে $z(t)$ হিসেবে।

1. $f(z) = z^2, \ z(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

Fig 7



2. $f(z) = \frac{1}{z},\ z(t) = 2 + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$.
3. $f(z) = z,\ z(t) = t + it, \quad t \in [0, 1]$.

■

19.4 চতুর্থ ধাপ (ভেঙে ভেঙে)

এক্ষুণি আমরা যে কয়টা contour integral করলাম, তার প্রত্যেকটাতেই $z(t)$-টা পুরো $[a, b]$-র উপরেই continuously differentiable ছিল, তাই $\frac{dz}{dt}$ বার করে integrate করতে অসুবিধা হয় নি। কিন্তু আমরা জানি সব contour-ই যে continuously differentiable হবে, এমন কোনো কথা নেই। কিন্তু সকলেই piecewise continuously differentiable হতে বাধ্য, মানে এমন $n \in \mathbb{N}$ আর $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ পাওয়া যাবে, যাতে contour-টা প্রতিটা $[t_{i-1}, t_i]$-এর উপর আলাদা করে continuously differentiable হয়। এরকম ক্ষেত্রে আমরা $[t_{i-1}, t_i]$-গুলোর উপর ভেঙে ভেঙে integrate করে যোগ করে দিই। কায়দাটা হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই আমাদের জানা, একটা definite integral-কে একাধিক ভাগে ভেঙে ভেঙে বার করা। নীচের উদাহরণটা হায়ার সেকণ্ডারী থেকে নেওয়া, তোমাকে কায়দাটা মনে করিয়ে দেওয়ার জন্য।

Example 8: যদি $\int_1^3 f(x)dx$ বার করতে দিই, যেখানে $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ 6 - x & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$, তবে কী করে করবে?

Fig 8 দেখে নিতে পারো।

SOLUTION:

আমরা x^2-কে integrate করতে জানি, আবার $6 - x$-কেও integrate করতে জানি। সমস্যা হয়েছে এখানে x^2 আর $6 - x$ দুটোই একই function-এর মধ্যে রয়েছে। এরকম ক্ষেত্রে আমরা integral-টাকে দুইভাগে ভেঙে নিলে সুবিধা হবে--

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 (6 - x)dx = \cdots = \frac{35}{6}.$$

■

একইরকম কাজ করা হয় contour integration-এর বেলাতেও। নীচের অংকে এরকম একটা উদাহরণ দিলাম।

Example 9: Fig 9-এ একটা contour দেখিয়েছি, যেটাকে এইভাবে প্রকাশ করা যায়--

$$z(t) = \begin{cases} 1 + ti & \text{if } t \in [0, 1] \\ 2 - t + i & \text{if } t \in (1, 2]. \end{cases}.$$

এই contour-টাকে C নাম দিলে $\int_C z^2 dz$ বার করো।

SOLUTION: আমাদের contour-টা দুটো অংশে ভেঙে দেওয়াই আছে। দুটো অংশের উপর আলাদা করে integrate করে যোগ করে দিলেই হবে।

Fig 8

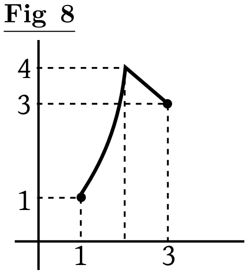
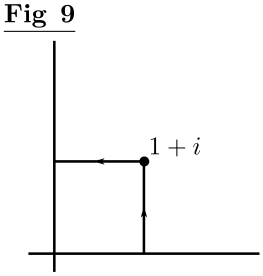


Fig 9



প্রথম অংশটার নাম দিলাম C_1,

$$z_1(t) = 1 + ti, \quad t \in [0,1],$$

আর দ্বিতীয় অংশটা হল C_2,

$$z_2(t) = 2 - t + i, \quad t \in [1,2].$$

লক্ষ করো আমরা কেমন $(1,2]$-র বদলে $[1,2]$ করে নিয়েছি। যেহেতু continuous, তাই এটা করা গেল, কারণ $z_1(1) = z_2(1)$. আমরা যখন contour integration করি, তখন সব সময়ে closed, bounded interval নিয়ে কাজ করি। এবার দুটো টুকরোর উপর আলাদা করে integrate করে উত্তর দুটো যোগ করে দেব।

$$\int_{C_1} z^2 dz = \int_0^1 (1+ti)^2 i dt = \cdots = \frac{-3+2i}{3}.$$

আর

$$\int_{C_2} z^2 dz = \int_1^2 (2-t+i)^2(-1) dt = \cdots = -\frac{4+9i}{3}.$$

দুটোকে যোগ করে উত্তর পাচ্ছি

$$\int_C z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \cdots = -\frac{7}{3}(i+1).$$

■

এবার কয়েকটা একইরকম অংক নিজে নিজে করে সড়গড় হয়ে নাও।

Exercise 5: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে $\int_C (z-1)dz$ বার করো। এখানে C দেওয়া হয়েছে $z(t)$-রূপে। Contour-গুলোর ছবি আঁকতে ভুলো না।

1. $z(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \in [0,1] \\ 1 + i(t-1) & \text{if } t \in [1,2] \\ 3 - t + i & \text{if } t \in [2,3] \\ i(4-t) & \text{if } t \in [3,4] \end{cases}$

2. $z(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \in [-1,1] \\ e^{i(t-1)} & \text{if } t \in [1, \pi+1] \end{cases}$

3. $z(t) = \begin{cases} t + it & \text{if } t \in [0,2] \\ 2 + (4-t)i & \text{if } t \in [2,3] \\ (5-t) + i & \text{if } t \in [3,4] \end{cases}$

■

এই চারটে ধাপে যা শিখলাম, সেটা মিলিয়েই contour integral-এর সংজ্ঞা তৈরী হয়--

DEFINITION: Contour integral

Let C be a contour given by a continuous function $z(t)$ for $t \in [a,b]$, that is continuously differentiable on $[t_{k-1}, t_k]$ for $k = 1, ..., n$ where $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Let $f(z)$ be a function such that $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(z(t))z'(t)dt$ is finite for $k = 1, ..., n$. Then the contour integral $\int_C f(z)dz$ is defined to be

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(z(t))dt.$$

DAY 20
Contour integration (part 2)

আজকে আমরা contour integration-এর কিছু গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম শিখব।

20.1 প্রথম ধর্ম (স্পীড বদলানো)

এবার যেটা শিখব তাকে এককথায় বলা যায়--

> "খালি স্পীড বদলালে contour integral বদলায় না।"

ব্যাপারটা দুটো উদাহরণ দিয়ে বোঝা যাক।

Example 10: এই curve-টা নাও, $t + it$ যেখানে $t \in [0,1]$. এই curve-টা বরাবর $f(z) = z^2$-কে integrate করো।

SOLUTION: এখানে contour-টাকে $z(t) = t + it$ লিখলে $\frac{dz}{dt} = 1 + i$ হবে। সুতরাং উত্তর হবে

$$\int_0^1 (t+it)^2(1+i)dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

এখানে contour-টার ছবি হবে Fig 10-এর মত। ■

এবার খুব একইরকম দেখতে আরেকটা অংক করা যাক।

Example 11: এখানে contour-টা হল $t^2 + it^2$, যেখানে $t \in [0,1]$. তোমাকে এই contour-এর উপরে z^2-কে integrate করতে হবে।

SOLUTION: এখানে contour-টাকে $z(t) = t^2 + it^2$ লিখলে $\frac{dz}{dt} = (1+i)2t$ হবে। সুতরাং উত্তর হবে

$$\int_0^1 (t^2+it^2)^2(1+i)2tdt = (1+i)^3 \int_0^1 2t^5 dt = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

এখানে ছবিটা হবে Fig 11-এর মত। ■

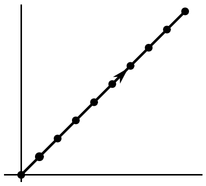


Fig 10

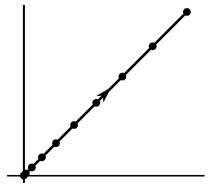


Fig 11

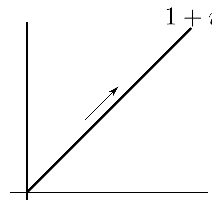


Fig 12

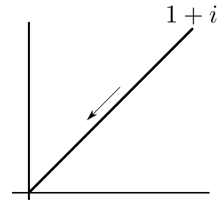


Fig 13

লক্ষ করো উত্তরটা একই হল। কেন একই হল, সেটা Fig 10 আর Fig 11-কে তুলনা করলেই বোঝা যাবে। এখানে দুটো contour-ই দাগ হিসেবে একই, পার্থক্য কেবল পেন চালানোর স্পীডে। স্পীডটা ছবি এঁকে বোঝানো কঠিন বলেই মাঝের বিন্দুগুলো এঁকেছি। বিন্দুগুলো দুই ক্ষেত্রেই $t = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ ...,\ 0.9,\ 1.0$-তে এঁকেছি। Fig 10-এর বেলায় বিন্দুগুলো সমান সমান দূরত্বে আছে, মানে স্পীড সর্বত্রই সমান। কিন্তু Fig 11-এর বেলায় বিন্দুগুলো প্রথমে ঘন ঘন থাকলেও পরে ছড়িয়ে গেছে, অর্থাৎ স্পীড বেড়েছে। কিন্তু তাও integral-টা একই রইল। এটা সবসময়েই হয়। যাওয়ার পথে তুমি স্পীড বদলালে কোনো আপত্তি নেই, তাতে contour integral-টা কখনোই বদলাবে না। খালি একটা জিনিস যেন না বদলায়--

পেনটা কোথায় কোন্ দিকে চলেছে।

এইটুকু অপরিবর্তিত থাকলে contour integral বদলাবে না--সেটা প্রমাণ করা মোটেই শক্ত নয়। কিন্তু প্রমাণটা দেখার আগে নিজের হাতে কিছু অংক করে ধারণাটা সড়গড় হয়ে নাও।

Exercise 6: আরো কয়েকটা contour দিচ্ছি, যেগুলো সবই দাগ হিসেবে আগের অংকদুটোর contour-এর মতই, তফাৎ খালি পেন চালানোয়। ছবি এঁকে ভাবো প্রতি ক্ষেত্রে কীভাবে পেন চালানো হচ্ছে। তার ভিত্তিতে সিদ্ধান্ত করো কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে $\int_C z^2 dz$ বার করলে আগের মতই $\frac{(1+i)^3}{3}$ আসবে। তারপর হাতে কলমে কষে মিলিয়ে নাও।
(i) $z(t) = t^3 + it^3,\ t \in [0,1]$. ($ii$) $z(t) = (1-t) + i(1-t),\ t \in [0,1]$. ($iii$) $z(t) = (t-2) + i(t-2)$, $t \in [2,3]$. (iv) $z(t) = (1-t^2) + i(1-t^2),\ t \in [-1,0]$. ($v$) $z(t) = (1-t^2) + i(1-t^2),\ t \in [-1,1]$.
■

স্পীডটা গুরুত্বপূর্ণ না হওয়ায় contour integration-এর সময়ে একটা contour-কে প্রকাশ করা অনেক সহজ হয়ে যায়। পুরো parametrisation-টা বলার দরকার হয় না, খালি ছবি এঁকে তীরচিহ্ন দিয়ে চলার দিকটা দেখিয়ে দিলেই হয়। যেমন, আগের অংকগুলো থেকে আমরা বলতে পারি যে Fig 12-র contour-টার বেলায় $\int_C z^2 dz = \frac{(1+i)^3}{3}$. কিন্তু Fig 13 বা Fig 14-এর বেলায় উত্তর অন্য কিছু হতে পারে।
যদি curve-টা closed হয় (মানে যেখান থেকে শুরু সেখানেই ফিরে এসে শেষ), তবে আরো সুবিধা, কোথা থেকে শুরু করছ (এবং শেষ করছ) সেটাও গুরুত্বপূর্ণ নয়। যেখান থেকেই শুরু করো না কেন, উত্তর একই আসবে (শেষটা অবশ্য শুরুর বিন্দুতেই হবে)। এই কারণে অনেক সময়েই দেখবে লোকে Fig 15-র মত একটা closed curve দিয়ে বলে এটার উপরে কোনো $f(z)$-কে clockwise (বা counter-clockwise) দিকে এক পাক দিয়ে integrate করো। ব্যস্, আর কিছু না, কোথায় শুরু

Fig 14

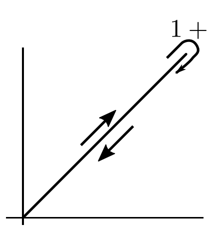
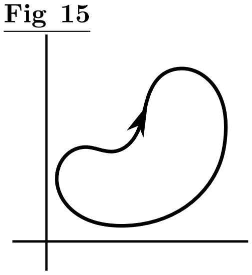


Fig 15



$$\oint_C f(z)dz$$

Fig 16

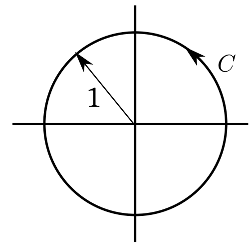


Fig 17

শেষ, কী parametrisation নেবে, সে সব মোটেই বলে দেয় না। খালি বলে দেয় পাক দেওয়ার দিকটা (clockwise নাকি counter-clockwise)। এর জন্য একটা চিহ্নও আছে, যেমন দেখিয়েছি Fig 16-এ। তীরচিহ্নটা অনেক সময়ে দেওয়া হয় না। সেক্ষেত্রে counter-clockwise দিক বুঝতে হয়। এরকম integral বার করার সময়ে তুমি তোমার সুবিধা মত কোনো বিন্দু থেকে শুরু করে, তোমার সুবিধা মত যা খুশি parametrisation নিয়ে কাজ করতে পারো।

Example 12: Fig 17-এ unit circle-টাকে দেখানো আছে C হিসেবে। প্রমাণ করো $\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

SOLUTION: যা খুশি parametrisation নিতে পারি। ধরো নিলাম e^{it} যেখানে $t \in [0, 2\pi]$. এই অংকটা আমরা আগেই করেছিলাম, এবং উত্তরটা $2\pi i$-ই এসেছিল।
যদি অন্য কোনো parametrisation নিতাম? ধরো $z(t) = e^{2\pi it - i\pi}$ যেখানে $t \in [0, 1]$. তাহলে শুরু (এবং শেষ) হচ্ছে -1 বিন্দুতে। টুক্ করে integration-টা করে ফেললেই দেখবে এখানেও ওই একই উত্তর আসছে। ■

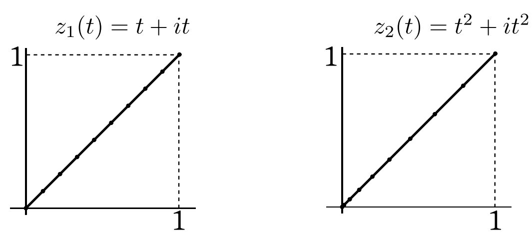
20.1.1 প্রমাণ

স্পীড বদলালে যে contour integral বদলায় না, সেই ব্যাপারটা এবার গুছিয়ে লিখে প্রমাণ করার সময় এসেছে। প্রমাণটা লেখার পথে প্রধান সমস্যা হল "স্পীড বদলানো" ব্যাপারটাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করা। তার জন্য ফের সেই দুটো উদাহরণ দেখি।

- $z_1(t) = t + it, \quad t \in [0, 1]$,
- $z_2(t) = t^2 + it^2, \quad t \in [0, 1]$.

Contour দুটো আরেকবার দেখিয়েছি Fig 18-এ। প্রথমটার ক্ষেত্রে বিন্দুগুলো সমান সমান অন্তরে আছে, দ্বিতীয়টার বেলায় ক্রমশঃ ছড়িয়ে যাচ্ছে। এই ব্যাপারটা হচ্ছে কারণ প্রথমটায় যেখানে t আছে, দ্বিতীয়টায় সেখানে আছে t^2. এই যে t-এর জায়গায় t-এর একটা function বসানো হয়েছে, সেইটাই স্পীডটা নিয়ন্ত্রণ করছে। অতএব যদি একটা contour হয় $z(t)$ তবে স্পীড বদলানো contour-টা হবে $z(\sigma(t))$, যেখানে $\sigma(t)$ হল t-এর একটা function. অবশ্য তা বলে $\sigma(t)$-র জায়গায় যা খুশি একটা function বসিয়ে দেওয়া চলবে না, কয়েকটা শর্ত পালন করতে হবে। প্রথম শর্ত হল $\sigma(t)$-কে

Fig 18



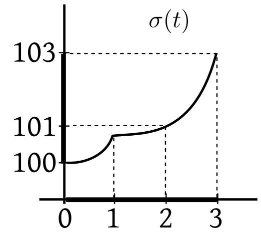


Fig 19

strictly increasing হতে হবে, অর্থাৎ $t_1 < t_2$ হলে $\sigma(t_1) < \sigma(t_2)$ হতে হবে। অর্থাৎ কিনা, দিক বদলানো চলবে না। মনে রেখো যে, $z(\sigma(t))$-কে ফের একটা contour হতে হবে, মানে সেই দুটো শর্ত পালন করতে হবে--continuous আর piecewise continuously differentiable. এর জন্য $\sigma(t)$-কেও আমরা continuous আর piecewise continuously differentiable নেব, তাহলেই হবে। কারণ $z(t)$ আর $\sigma(t)$ দুজনেই continuous হওয়ায় ওদের composition-ও continuous হবে। আবার দুজনেই piecewise continuously differentiable, তাই composition-টাও তাই হবে। সেটা কেন হবে, একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝাই।

ধরো $z : [100, 103] \to \mathbb{C}$, যেটা $[100, 101]$ আর $[101, 103]$-এর উপরে continuously differentiable, আর $\sigma(t)$-এর গ্রাফটা Fig 19-এর মত, যেটা $[0, 1]$ আর $[1, 3]$-এর উপরে continuously differentiable. ছবি থেকে দেখা যাচ্ছে $t = 2$ হলে $\sigma(t) = 101$ হয়। $[0, 1]$ তো এমনিতেই $[0, 1]$ আর $[1, 3]$-তে ভেঙেই ছিল। এখন আবার $t = 2$ এসে গিয়ে আরো ছোটো ছোটো টুকরোতে ভেঙে গেল--$[0, 1], [1, 2]$ আর $[2, 3]$. লক্ষ করো এই প্রত্যেকটা interval-এর উপরেই $z(\sigma(t))$ হল দুটো continuously differentiable function-এর composition, তাই অবশ্যই continuously differentiable. ব্যস্, এই ব্যাপারটা একবার বুঝে গেলে বাকিটুকু খালি লেখার কায়দা। প্রমাণের আগে প্রথমে theorem-টা গুছিয়ে লিখে নিই--

THEOREM

Let $z(t)$, for $t \in [a, b]$, denote a contour C. Let $\sigma : [c, d] \to [a, b]$ be a strictly increasing piecewise continuously differentiable function such that $\sigma(c) = a$ and $\sigma(d) = b$. Then $z(\sigma(t))$ for $t \in [c, d]$ gives a contour, D, say. For any function $f(z)$ we have

$$\int_C f(z)dz = \int_D f(z)dz.$$

If one of them is undefined, then so is the other.

Proof: প্রথমে দেখাতে হবে যে, $z(\sigma(t))$ সত্যিই একটা contour, মানে continuous এবং piecewise continuously differentiable।

> Step 1: Since composition of continuous functions is again continuous, hence $z(\sigma(t))$ is continuous.
> Also, since composition of piecewise continuously differentiable functions is piecewise continuously differentiable, hence $z(\sigma(t))$ is piecewise continuously differentiable.
> So $z(\sigma(t))$ denotes a contour.
> Also, since $z(\sigma(c)) = z(a)$ and $z(\sigma(d)) = z(b)$, it has the same starting and

> finishing points as C.

এবার দেখাতে হবে integral দুটো সমান। এই কাজটা আমরা দুটো কেসে ভেঙে করব। প্রথমে ধরে নেব $\sigma(t)$-টা পুরো $[c,d]$-র উপরেই continuously differentiable. সেই কেসটা বুঝে গেলে piecewise continuously differentiable কেসটাও হয়ে যাবে, কারণ প্রথম কেসটার যুক্তিটাই প্রতিটা piece-এর উপর আলাদা করে লাগিয়ে দেওয়া যাবে।

> Step 2:
>
> Case 1: Here we assume that $\sigma(t)$ continuously differentiable everywhere on $[c,d]$, and $z(s)$ continuously differentiable everywhere on $[a,b]$.
>
> Then
>
> $$\int_D f(z)dz = \int_c^d f(z(\sigma(t)))\frac{d}{dt}(z(\sigma(t)))dt = \int_c^d f(z(\sigma(t)))z'(\sigma(t))\sigma'(t)dt, \qquad \mathbf{(1)}$$
>
> by chain rule.
>
> Also,
>
> $$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(s))z'(s)ds.$$

এবার s-এর জায়গায় $\sigma(t)$ বসাব--

> We put $s=\sigma(t)$. Then $\frac{ds}{dt}=\sigma'(t)$, or $ds=\sigma'(t)dt$. Also, $\sigma(c)=a$ and $\sigma(d)=b$.
>
> So
>
> $$\int_a^b f(z(s))z'(s)ds = \int_c^d f(z(\sigma(t)))z'(\sigma(t))\sigma'(t)dt. \qquad \mathbf{(2)}$$
>
> Hence, from $(\mathbf{1})$ and $(\mathbf{2})$,
>
> $$\int_C f(z)dz = \int_D f(z)dz,$$
>
> as required.

এবার piecewise continuously differentiable কেসটা। এখানে notation-টা একটু জটিল লাগতে পারে। কিন্তু আসলে প্রথম কেসটাই ব্যবহার করব, কয়েকটা piece-এ ভেঙে ভেঙে।

> Case 2: Let $\sigma(t)$ be continuously differentiable on $[t_0,t_1],...,[t_{n-1},t_n]$ for some $n\in\mathbb{N}$, where
>
> $$c=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=d.$$
>
> Let $z(s)$ be continuously differentiable on $[s_0,s_1],...,[s_{m-1},s_m]$ for some $m\in\mathbb{N}$, where
>
> $$a=s_0<s_1<\cdots<s_{m-1}<s_m=b.$$

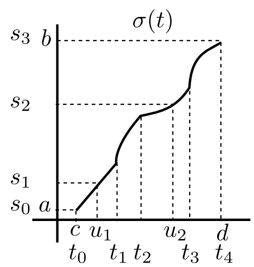


Fig 20

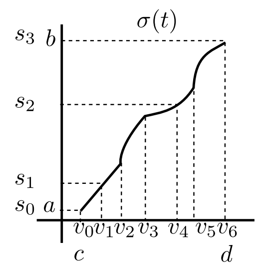


Fig 21

> Define $u_i = \sigma^{-1}(s_i)$ for $i = 0, ..., m$.

এখানে Fig 20-এর দিকে চোখ রাখলে সুবিধা হবে।

> Let $\{v_0, ..., v_k\} = \{t_0, ..., t_n\} \cup \{u_0, ..., u_m\}$, where
>
> $$c = v_0 < v_1 < \cdots < v_{k-1} < v_k = d.$$

Fig 21 দেখে নাও। এবার আমরা এই $[v_{i-1}, v_i]$-দের উপরে প্রথম কেসটা লাগাব।

> Let $w_i = \sigma(v_i)$ for $i = 0, ..., k$.
>
> Then σ maps $[v_0, v_1], [v_1, v_2], ..., [v_{k-1}, v_n]$ to $[w_0, w_1], [w_1, w_2], ..., [w_{k-1}, w_k]$, respectively.
>
> We split C into $C_1, ..., C_k$ for $s \in [w_0, w_1], [w_1, w_2], ..., [w_{k-1}, w_k]$, respectively.
>
> Similarly, we split D into $D_1, ..., D_k$ for $t \in [v_0, v_1], [v_1, v_2], ..., [v_{k-1}, v_k]$, respectively.
>
> Then $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_k} f(z)dz$, and $\int_D f(z)dz = \int_{D_1} f(z)dz + \cdots + \int_{D_k} f(z)dz$.
>
> By case I, we have $\int_{C_i} f(z)dz = \int_{D_i} f(z)dz$ for $i = 1, ..., k$.
>
> Hence $\int_C f(z)dz = \int_D f(z)dz$, as required.

[Q.E.D]

এই প্রমাণ পড়তে গিয়ে মাথা গুলিয়ে যাওয়া বিচিত্র নয়। কিন্তু মূল ব্যাপারটা সহজই, এবং সেটা যেন ভুলে যেও না--

স্পীড বদলালে contour integral-টা বদলায় না।

DAY 21
Contour integration (part 3)

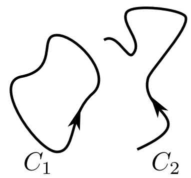


Fig 22

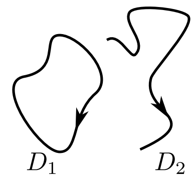


Fig 23

21.1 দ্বিতীয় ধর্ম (কাটা-ছেঁড়া)

অনেক সময়ে কিছু contour-কে কেটে বা জুড়ে নতুন contour বানাতে হয়। তার ফলে contour integral-রা কীভাবে বদলায় সেটা জানা থাকলে সুবিধা। এই প্রসঙ্গে একটা কায়দা তো শিখেইছ--

কাটা ছেঁড়া ঠুক্ ঠাক্ কত দেখ যন্ত্র
ভেঙে চুরে জুড়ে দেই তারও জানি মন্ত্র।

--সুকুমার রায়

> যদি পরপর কয়েকটা contour-কে জুড়ে দাও (মানে প্রথমজনের শেষ থেকে দ্বিতীয়জনের শুরু, এইরকম), তবে contour integral-গুলো যোগ হয়ে যায়।

আরেকটা জিনিস হল--

> যদি কোনো contour-এর অভিমুখটা উল্টে দাও, তবে contour integral-টার খালি চিহ্নটা উল্টে যাবে।

যেমন Fig 22-এর contour-গুলোকে ওল্টালে পাবে Fig 23-এর contour-গুলো। তাই $\int_{C_1} f(z)dz = -\int_{D_1} f(z)dz$ আর $\int_{C_2} f(z)dz = -\int_{D_2} f(z)dz$ হবে। এই ব্যাপারটা প্রমাণ করা খুবই সহজ। হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে শিখেছিলে যে $\int_a^b g(t)dt = -\int_b^a g(t)dt$ হয়। এটা আসলে সেখান থেকেই আসে। নীচের theorem-টায় সেটাই বলেছে।

THEOREM

Let C be a contour given by $z_1(t)$ for $t \in [a, b]$. Let D be the contour given by $z_2(t) = z_1(a+b-t)$ for $t \in [a, b]$. If $f(z)$ is a function for which $\int_{C_1} f(z)dz$ is defined, then

$$\int_{C_2} f(z)dz = -\int_{C_1} f(z)dz.$$

Proof: এই যে আমরা $z_2(t) = z_1(a+b-t)$ নিয়েছি, এর মানেই হল তীরচিহ্ন-টা উল্টে নেওয়া। যেমন $t = a$ বসালে

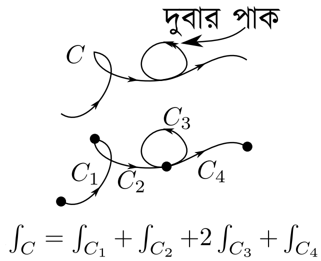


Fig 24

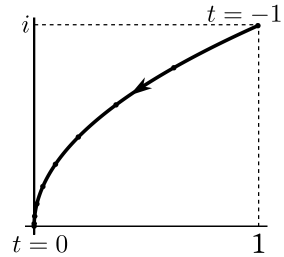


Fig 25

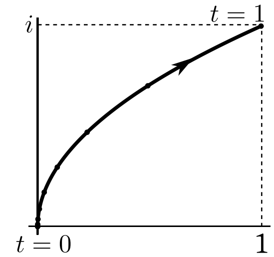


Fig 26

$z_2(a) = z_1(b)$ পাবে, আবার $t = b$ বসালে পাবে $z_2(b) = z_1(a)$.

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)dz &= \int_a^b f(z_2(t))z_2'(t)dt \\
&= \int_a^b f(z_1(a+b-t))\tfrac{d}{dt}z_1(a+b-t)dt \\
&= -\int_a^b f(z_1(a+b-t))z_1'(a+b-t)dt \\
&= \int_b^a f(z_1(a+b-t))z_1'(a+b-t)dt \\
&= \int_a^b f(z_1(s))z_1'(s)(-ds) \quad \left[\text{putting } s = a+b-t\right]
\end{aligned}$$

লক্ষ করো, $t = a$ হলে $s = b$ হয়। আবার $t = b$ হলে $s = a$ হয়।

$$= -\int_{C_1} f(z)dz,$$

ঠিক যেমনটা দরকার ছিল। **[Q.E.D]**

এই theorem-টার সঙ্গে আগের theorem-এর প্রমাণটা মেশালেই নীচের অংকটা হয়ে যাবে।

Exercise 7: Let $\int_C f(z)dz$ be well-defined. Let C be given by $z(t)$ for $t \in [a,b]$. Let $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ be a continuous, strictly <u>decreasing</u> piecewise continuously differentiable function. Let D be the contour given by $z(\sigma(t))$ for $t \in [c,d]$. Then

$$\int_D f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

HINT:
ভয় নেই, সমাধানটা খুব লম্বা নয়। $\sigma(t)$-কে "উল্টে" একটা নতুন function বানাও $s(t) = \sigma(c+d-t)$. লক্ষ করো, $s(t)$-টা আগের theorem-টার সব শর্তই পালন করে। এবার নিজে নিজে এগোও। ■

এতসব আলোচনা করার মূল উদ্দেশ্য একটাই--কোনো খটোমটো প্যাঁচালো contour দেওয়া থাকলে সেটাকে তুমি যতগুলো খুশি finite-সংখ্যক টুকরো করতে পারো, তারপর প্রত্যেকটা টুকরোর উপরে আলাদা করে integrate করে সবগুলো integral যোগ করে দিলেই হবে। একটা প্যাঁচালো দেখতে উদাহরণ দিয়েছি Fig 24-এ। অনেক সময়ে এইভাবে চিন্তা করলে ছবি দিয়েই একটা contour integral বার হয়ে যায়, সত্যি সত্যি কোনো integral কষতেই হয় না! এরকম একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 13: ধরো C একটা contour, যার parametrisation হল

$$z(t) = \begin{cases} t^4 + it^2 & \text{if } t \in [-1, 0] \\ t^6 + it^3 & \text{if } t \in [0, 1] \end{cases} .$$

তোমাকে বার করতে হবে $\int_C f(z)dz$, যেখানে $f(z) = e^{-z^2}$. কী করে করবে?

SOLUTION: অবশ্যই একটা কায়দা হল দাঁতে দাঁত চেপে কষতে শুরু করা। আরেকটা কায়দা হল ছবি দিয়ে ভাবা। এখানে contour-টার দুটো অংশ। প্রথম অংশে যখন t-টা -1 থেকে 0 অব্দি যাচ্ছে, তখন $z(t) = t^4 + it^2$, যেটাকে $x + iy$ আকারে লিখলে $x = t^4$ আর $y = t^2$ হয়। লক্ষ করো এখানে $x = y^2$ হচ্ছে, তার মানে contour-এর প্রথম অংশটা $x = y^2$ বরাবর রয়েছে (Fig 25)। দ্বিতীয় অংশে যখন 0 থেকে 1-এর যাচ্ছে, তখন ওই একই পথ বরাবর ফিরছে (Fig 26)। যদি contour-টার এই দুটো অংশকে C_1 আর C_2 নাম দিই, তবে

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

আবার C_1 এবং C_2 বস্তুতঃ একই দাগ, খালি চলবার অভিমুখটা উল্টে গেছে, তাই

$$\int_{C_1} f(z)dz = -\int_{C_2} f(z)dz.$$

সুতরাং আর কোনো অংক না করেই বলতে পারি যে $\int_C f(z)dz = 0$.

লক্ষ করো, এখানে $f(z)$ যে e^{-z^2}, সেটা কোথাও কাজেই লাগল না। খালি এইটুকু লাগল যে C_1 বরাবর (এবং অতএব C_2-র বরাবরও) যেন $f(z)$-কে integrate করা যায়। ■

কালকে আমরা একটা জিনিস শিখব যার সাহায্যে আরো অনেক ধরণের integral-কে এরকম চোখে দেখেই কষে দেওয়া যাবে।

21.2 তৃতীয় ধর্ম: triangle inequality এবং estimation theorem

অংকের জগতে triangle inequality ব্যাপারটা বিভিন্নরূপে বার বার করে আসে। সবচেয়ে সহজ রূপ হল real সংখ্যাদের বেলায়--যদি $a, b \in \mathbb{R}$ হয়, তবে $|a + b| \leq |a| + |b|$. এখানে $|\cdots|$ দিয়ে absolute value বোঝানো হয়েছে। যদি $a, b \in \mathbb{C}$ হয়, আর $|\cdots|$ দিয়ে modulus বোঝাই, তাহলেও $|a + b| \leq |a| + |b|$ হয়, এবং এটা হল complex সংখ্যাদের triangle inequality. Real integration-এর বেলাতেও একটা triangle inequality আছে। তার জন্য আমরা $\int_a^b f(x)dx$ আর $\int_a^b |f(x)|dx$ নিয়ে কাজ করি, যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $a < b$, আর $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ এমন function, যাতে integral দুটোই defined হয়। তাহলে triangle inequality বলে--

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

সুতরাং ফস্ করে মনে হতে পারে যে, contour integral-দের জন্যও নিশ্চয়ই একটা triangle inequality থাকবে যেটা ঠিক একইরকম দেখতে, খালি $\int_a^b$-র জায়গায় $\int_C$. দুঃখের কথা, সেটা সম্ভব নয়, কারণ $|f(z)|$-টা real হলেও $\int_C |f(z)|dz$ কিন্তু real নাও হতে পারে, তাই ওর সঙ্গে কোনো inequality লেখা যাবে না। তবে complex integration-এর বেলাতেও এক ধরণের triangle inequality আছে, যদিও সেটা contour integral নিয়ে নয়। এখানে আমরা $a, b \in \mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করব, যেখানে $a < b$. এবার $[a, b]$-র উপরে একটা function নেব $g(t)$ যেখানে $g : [a, b] \to \mathbb{C}$. তাহলে triangle inequality-র চেহারাটা দাঁড়াবে এইরকম--

Triangle inequality

Let $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$. Let $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ be an integrable function. Then

$$\left|\int_a^b g(t)dt\right| \le \int_a^b |g(t)|dt.$$

Proof: প্রমাণটা অনেকটা হায়ার সেকণ্ডারীতে যেভাবে definite integration-কে sum-এর limit হিসেবে লেখা শিখেছিলে, সেইভাবে হবে।

We split $[a, b]$ into n equal subintervals $[a + (k-1)h, a + kh]$ for $k = 1, ..., n$, where $h = \frac{b-a}{n}$.

Then

$$\int_a^b g(t)dt = \lim_{n\to\infty} h \sum_{k=1}^n g(kh).$$

So

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g(t)dt\right| &= \left|\lim_{n\to\infty} h \sum_{k=1}^n g(kh)\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|h \sum_{k=1}^n g(kh)\right| \quad [\because |\cdot| \text{ is continuous}] \\
&\le \lim_{n\to\infty} h \sum_{k=1}^n |g(kh)| \quad [\text{by triangle inequality for real integrals}] \\
&= \int_a^b |g(t)|dt.
\end{aligned}$$

[Q.E.D]

Triangle inequality-এর এই রূপটা ব্যবহার করে আমরা একটা theorem প্রমাণ করব contour integral-দের জন্য। এটা অত্যন্ত দরকারী একটা theorem, পরে বার বার কাজে লাগবে।

Estimation theorem

Let C be a contour and let $f(z)$ be integrable over this contour and for all z in the contour $|f(z)| \le M$. Then

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le M \times \text{length}(C).$$

প্রমাণটা শেখার আগে বলে নিই, এর নাম estimation theorem কেন হয়েছে। মনে করো তোমরা পিকনিকে যাবে, দশ বন্ধুতে মিলে। তোমাকে আগেভাগেই খরচাপাতির একটা মোটামুটি হিসেব (অর্থাৎ estimate) করতে হবে। তবে তুমি এইভাবে

চিন্তা করবে--যাবে মোট দশজন, কেউ কম কেউ বেশী খাবে, তারপর যাতায়াতের খরচা আছে। কিন্তু সব মিলিয়ে কারো জন্যই নিশ্চয়ই 600 টাকার বেশী পড়বে না। সুতরাং একটা estimate হল $600 \times 10 = 6000$ টাকা। লক্ষ করো, এখানে 10 সংখ্যাটা অবধারিত, কিন্তু 600-টা একটা upper bound মাত্র। আমাদের theorem-টাও ঠিক একইরকম চিন্তার ফল, সেই জন্যই লোকে এর নাম দিয়েছে estimation theorem.

Proof:

> Let C be parametrised by $z(t)$ for $t \in [a,b]$. Then
>
> $$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dt \leq M\int_a^b |z'(t)|dt = M \times \text{length}(C),$$
>
> as required.

এই শেষ ধাপটাতে কি খাবি খেলে? ওই যেখানে লিখলাম $\int_a^b |z'(t)|dt = \text{length}(C)$? এটা আসলে real analysis-এর জিনিস (যেটা প্রমাণ করা আছে আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Real Analysis (vol 3)-তে)। এখানে অতি সংক্ষেপে বলে দিই। যদি একটা parametric curve থাকে $(x(t), y(t))$, যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$, তবে তার দৈর্ঘ্য হয় $\int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}dt$. আমাদের এখানে $z(t)$-র real অংশকে $x(t)$ আর imaginary অংশকে $y(t)$ নাম দিলে $|z'(t)|$ আসলে ওই খটোমটো square root-টাই হয়! **[Q.E.D]**

আগেই বলেছি estimation theorem খুব দরকারী জিনিস। এর প্রয়োগের মূল কথাটা এই--যদি কোনো $\int_C f(z)dz$-কে ছোট্টো দেখাতে চাও (মানে তার modulus-কে ছোট্টো দেখাতে চাও), তবে তার দুটো কায়দা আছে--

- হয় দেখাও যে, $|f(z)|$-টাই খুব ছোট্টো (মানে M-টা খুব ছোট্টো)
- আর নয়তো দেখাও যে, $|f(z)|$-টা bounded, আর C-টা দৈর্ঘ্যে খুব কম।

এই দুটোই হল estimation theorem-কে প্রয়োগ করার পথ।

DAY 22
Cauchy-Goursat Theorem

22.1 কী জিনিস?

এইবার একটা theorem-এর কথা বলব, যেটার মত গুরুত্বপূর্ণ theorem পুরো complex analysis-এ আর একটা আছে কিনা সন্দেহ। জিনিসটা ছবি দিয়ে বোঝার পক্ষে খাসা। মনে করো Fig 27-এর মত একটা simple closed contour দিলাম C. এখানে closed বলার অর্থ হল, যেখানে শুরু সেখানেই শেষ, মানে যদি $z(t)$ হিসেবে parametrise করো, যেখানে

Fig 27

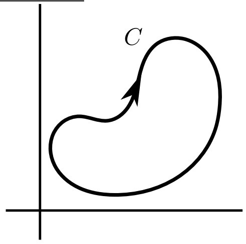


Fig 28

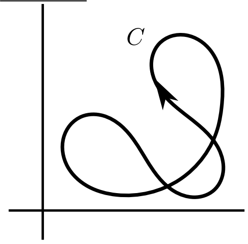


Fig 29

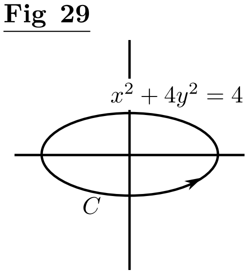
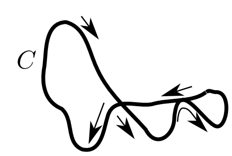


Fig 30



$t \in [a, b]$ তবে $z(a) = z(b)$ হবে। আর simple মানে নিজেই কখনো নিজের ঘাড়ে পড়বে না, মানে Fig 28-এর মত হওয়া চলবে না। অংকের ভাষায় simple হওয়া মানে $t_1 \neq t_2 \in (a, b)$ হলে $z(t_1) \neq z(t_2)$ হবে। আর সেই দুটো পরিচিত শর্ত তো আছেই--$z(t)$-টা সর্বত্র continuous আর piecewise continuously differentiable.
এবার ধরো একটা function দেওয়া আছে $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. তোমাকে $\int_C f(z)dz$ বার করতে হবে। লক্ষ করো, C-টা একটা দ্বীপের মত জায়গাকে ঘিরে আছে। ওই দ্বীপের সর্বত্র এবং C-এর উপরের প্রতিটা বিন্দুতে যদি f-টা differentiable হয়, তবে কিছু মাত্র integrate না করেই বলে দেওয়া যায় যে, $\int_C f(z)dz = 0$ হতে বাধ্য! এটাই হচ্ছে Cauchy-Goursat theorem (কোশি গুর্‌স-অ)।

Cauchy-Goursat theorem

Let C be a simple, closed contour given by $z(t)$ for $t \in [a, b]$. If $f(z)$ is a function which is differentiable at every point on or inside C then $\oint_C f(z)dz = 0$.

এমনটা কেন হয়, সে আলোচনায় পরে আসছি। আগে একটা প্রয়োগ দেখাই।

22.2 প্রয়োগ

Example 14: ধরো C হল Fig 29-এ দেখানো ellipse-টা। তবে $\int_C e^{iz}dz$ কত হবে?

SOLUTION: এমনি করতে গেলে প্রথমে C-এর একটা parametrisation বার করতে হত, তাকে differentiate করে $\frac{dz}{dt}$ বার করে, real আর imaginary অংশদুটোকে আলাদা করে integrate করে অনেক হ্যাঙ্গাম করতে হত। কিন্তু Cauchy-Goursat theorem-এর দৌলতে সেসব কিচ্ছু না করে, খালি লক্ষ করব যে C একটা simple closed contour, আর তার উপরে এবং ভিতরে e^{iz} সর্বত্র differentiable (আসলে e^{iz} পুরো $\mathbb{C}$-এর উপরেই সর্বত্র differentiable)। সুতরাং Cauchy-Goursat theorem দিয়ে ধাঁ করে বলে দেব যে, $\int_C e^{iz}dz = 0$. ■

Exercise 8: ধরো C হল এই contour-টা-- $z(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$. তোমাকে বলতে হবে নীচের কোন্ কোন্ $f(z)$-এর বেলায় Cauchy-Goursat theorem দিয়ে $\int_C f(z)dz$-কে 0 বলা যাবে।
(*i*) $f(z) = \frac{1}{z-i}$. (*ii*) $f(z) = \frac{1}{z-3}$. (*iii*) $f(z) = \frac{1}{z^2+5}$. (*iv*) $f(z) = \frac{1}{z(z-5)}$.
HINT: প্রথম অংকটা কষে দিচ্ছি। এখানে $f(z) = \frac{1}{z-i}$, যেটা $z = i$ বাদে সর্বত্র differentiable. সমস্যা হল এই ঝামেলাজনক i বিন্দুটা রয়েছে C-এর ভিতরে। তাই এখানে Cauchy-Goursat theorem খাটানো যাবে না। ■

এবার সামান্য একটু জটিল অংক দেখি। এখানে দেখবে যে, contour-টা যদি কখনো-সখনো ভুল করে নিজের ঘাড়ের উপরে উঠেও পড়ে, তাও Cauchy-Goursat theorem দিয়ে কাজ পাওয়া যেতে পারে।

Example 15: এবার curve-টা দিলাম Fig 30-এর মত। এটা closed বটে, কিন্তু simple নয়, কারণ নিজেকেই নিজে

Fig 31

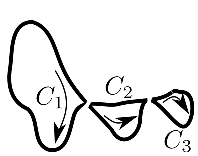


Fig 32

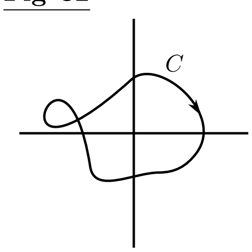


Fig 33

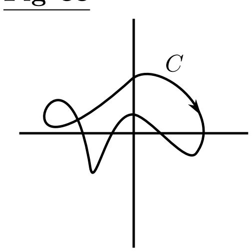
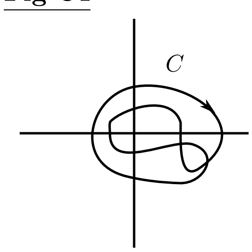


Fig 34



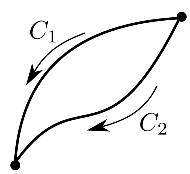


Fig 35

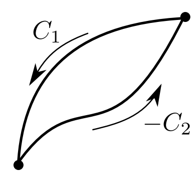


Fig 36

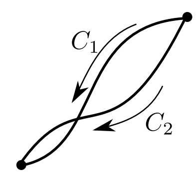


Fig 37

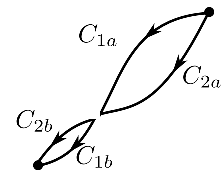


Fig 38

মাঝখানে একবার ছেদ করেছে, আর একবার ছুঁয়ে গেছে। এখানে $\int_C e^{iz}dz$ কত হবে?
SOLUTION: এখানে দুটো ঝামেলাজনক বিন্দু আছে--একটা ছেদ আর একটা ছোঁয়া। এই দুটো বিন্দুতে contour-টাকে টুকরো করে নাও (Fig 31)। তবে তিনটে contour পাবে C_1, C_2 আর C_3, যারা প্রত্যেকেই simple এবং closed. অতএব এদের প্রত্যেকের উপরেই Cauchy-Goursat theorem খাটানো যায়। আবার লক্ষ করো যে,

$$\int_C e^{iz}dz = \int_{C_1} e^{iz}dz + \int_{C_2} e^{iz}dz + \int_{C_3} e^{iz}dz = 0 + 0 + 0 = 0.$$

■

Exercise 9: Fig 32, Fig 33 আর Fig 34-এ একটা করে contour দেওয়া আছে, C. প্রতি ক্ষেত্রে তোমাকে বলতে হবে Cauchy-Goursat theorem দিয়ে জোর দিয়ে বলা যায় কিনা যে $\int_C \frac{1}{z}dz = 0$ হবেই। ■

এবার আরেক ধরণের প্রয়োগ দেখি।

Example 16: Fig 35-এ দুটো contour দেখিয়েছি, C_1 আর C_2. এরা দুজনেই একই বিন্দু থেকে শুরু, আবার একই বিন্দুতেই শেষ। বলো তো $\int_{C_1} e^{iz}dz$ আর $\int_{C_2} e^{iz}dz$-এর মধ্যে কোনটা বেশী বড়!
SOLUTION: দুটো contour-এর মধ্যে যে কোনো একটা নাও। ধরো C_2-টাকে নিলাম। এবার সেটাকে উল্টে দাও, মানে তীরচিহ্নটাকে উল্টে দাও। আগে যেটা শুরু ছিল এখন সেটা শেষ, আর আগের শেষটা এখন শুরু। এই নতুন contour-টাকে $-C_2$ নাম দেওয়া যাক। তবে C_1 আর $-C_2$ দুজনে মিলে Fig 36-এর মত একটা দিব্যি simple closed contour হচ্ছে, দেখেছ? এটাকে নাম দিই, C. তাহলে Cauchy-Goursat theorem বলছে যে, $\int_C e^{iz}dz = 0$ হবে। এদিকে $\int_C e^{iz}dz = \int_{C_1} e^{iz}dz + \int_{-C_2} e^{iz}dz$. আবার $\int_{-C_2} e^{iz}dz = -\int_{C_2} e^{iz}dz$. অতএব পাচ্ছি,

$$\int_{C_1} e^{iz}dz = \int_{C_2} e^{iz}dz.$$

Fig 39



Fig 40

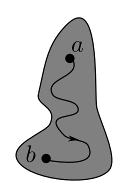


Fig 41

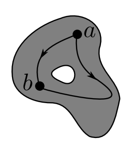
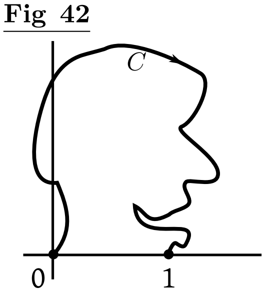


Fig 42



সুতরাং integral দুটোর মধ্যে কেউ বড় ছোট নয়, দুজনেই সমান। ■

এই অংকটা যদি ভালো করে বুঝে থাকো, তবে নীচের অংকটাও করতে পারা উচিত।

Exercise 10: যদি C_1, C_2 হয় Fig 37-এর মত, তবেও কি $\int_{C_1} e^{iz}dz = \int_{C_2} e^{iz}dz$ হবে?
HINT: এখানে C_1 আর C_2 পরস্পরকে ছেদ করেছে। সেই ছেদবিন্দুতে ভেঙে নিলে সুবিধা হবে Fig 38-র মত। ■

এই দুটো অংক থেকে আমরা কী শিখলাম বুঝে নাও--

> ধরো একটা function আছে $f(z)$ যেটা কোনো একটা region $D \subseteq \mathbb{C}$-এর প্রতিটা বিন্দুতে differentiable. ধরো D-এর মধ্যে কোথাও কোনো ফুটো নেই (Fig 39 দ্যাখো)। এরকম "ফুটো-বিহীন" সেটদের বলে **simply connected**. এবার D-এর মধ্যে যে কোনো দুটো বিন্দু নাও a, b. (এখানে $a = b$ হলেও আপত্তি নেই)। তবে a থেকে b পর্যন্ত Fig 40-এর মত যাই contour C নাও না কেন $\int_C f(z)dz$ সর্বদা একই হবে, C-এর উপর নির্ভর করবে না মোটেই।

ফুটো থাকলে সমস্যাটা কোথায় হত বুঝছ তো? যদি ফুটোর দুই দিক দিয়ে দুটো contour নিতে Fig 41-এর মত, তবে আর Cauchy-Goursat theorem লাগানো যেত না, কারণ মাঝখানের ফুটোতে তো আর $f(z)$-টা differentiable হবার গ্যারান্টি নেই!

Example 17: Fig 42-এ একটা বিদ্ঘুটে contour দিয়েছি। বলো তো $\int_C e^{iz}dz$ কত হবে? লক্ষ করো, আমি কিন্তু C-এর কোনো ফর্মুলা পর্যন্ত দিই নি! তাও অংকটা করা যাবে!
SOLUTION: C শুরু হয়েছে 0 থেকে আর শেষ হয়েছে 1-এ গিয়ে। আমরা এবার একটা ভদ্রগোছের contour নেব যেটাও 0 থেকে 1 অব্ধি যায়। সহজতম contour হল স্রেফ একটা সরলরেখা--

$$z(t) = t, \quad t \in [0, 1].$$

এইটা বরাবর integrate করা তো জলভাত--

$$\int_0^1 e^{it}dt = \int_0^1 \cos t dt + i \int_0^1 \sin t dt = \sin 1 + i(1 - \cos 1).$$

যেহেতু $f(z) = e^{iz}$ সর্বত্রই differentiable, তাই $\int_C f(z)dz$-ও এটাই হবে। ■

Exercise 11: Fig 43-এ দুটো contour দেখিয়েছি, C_1 আর C_2. এদের জন্য $\int_{C_k} e^z dz$ এবং $\int_{C_k} \frac{dz}{z}$ বার করো।
HINT: যখন $\int_{C_k} \frac{dz}{z}$ বার করবে তখন, কিন্তু origin-টাকে এড়িয়ে যেতে হবে। ■

Fig 43

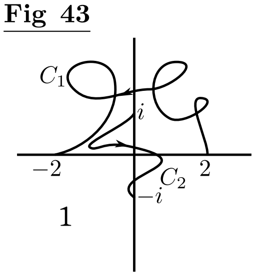


Fig 44

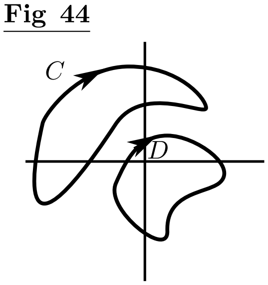


Fig 45

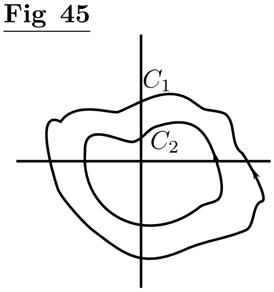
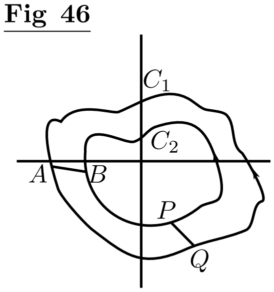


Fig 46



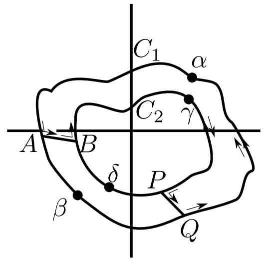


Fig 47

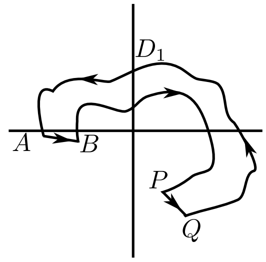


Fig 48

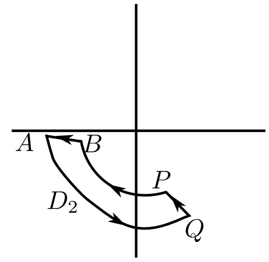


Fig 49

এবার আরেকটা অন্যরকম প্রয়োগ দেখাই। এখানে আমরা কাজ করব $f(z) = \frac{1}{z}$ নিয়ে, যেটা অবশ্যই $z = 0$-তে differentiable নয় (defined-ই নয়, তো আর differentiable হবেটা কোত্থেকে!)। সুতরাং যদি Fig 44-এর মত দুটো simple, closed contour দিই, তবে $\int_C \frac{dz}{z}$-এর বেলায় Cauchy-Goursat theorem লাগানো গেলেও, $\int_D \frac{dz}{z}$-এর বেলায় যাবে না। কিন্তু এরকম ক্ষেত্রেও Cauchy-Goursat theorem দিয়ে ফল পাওয়া যায়, যেমন আমরা নীচে দেখাচ্ছি।

Example 18: এবার Fig 45 দ্যাখো। এখানে দুটো simple closed contour রয়েছে, C_1 আর C_2. একটা আরেকটার মধ্যে। বলো তো $\int_{C_1} \frac{dz}{z}$ বেশী বড়, নাকি $\int_{C_2} \frac{dz}{z}$?

SOLUTION: এখানে একটা কৌশল করব। প্রথমে Fig 46-এর মত করে C_1 আর C_2-র মধ্যে দু জায়গায় দুটো ব্রীজ বানাবো। ব্রীজদুটো যেকোনো জায়গাতেই বানানো যেতে পারে। এইবার কী করতে চলেছি, তার বর্ণনাটা পড়ার সময়ে Fig 47-এর দিকে চোখ রাখো। এখানে বোঝানোর জন্য চারটে বিন্দু দেখিয়েছি, α, β, γ আর δ. প্রথমে Q থেকে শুরু করে C_1 বরাবর α হয়ে A-তে এসো, তারপর ব্রীজ দিয়ে B-তে যাও, সেখান থেকে C_2 ধরে γ হয়ে P-তে এসো, এবং অবশেষে ব্রীজ ধরে Q-তে ফিরে যাও (Fig 47)। দিব্যি চমৎকার একটা simple closed contour পাওয়া গেল এইভাবে (Fig 48)। এর নাম দাও D_1. আবার $A \to \beta \to Q \to P \to \delta \to B$ পথে গেলে আরেকটা একইরকম simple closed contour পাবে, D_2, যার ছবি রয়েছে Fig 49-এ। লক্ষ করো--

- D_1 বা D_2-র যে অংশটুকু C_1 বরাবর আছে, সেখানে আমরা C_1-এর তীরচিহ্নের দিকেই যাচ্ছি।
- কিন্তু D_1, D_2-র যে অংশগুলো C_2-তে আছে, সেখানে তীরচিহ্নের উল্টো দিকে যাচ্ছি।
- ব্রীজদুটো দিয়ে D_1 যে দিকে যাচ্ছে, D_2 যাচ্ছে ঠিক তার উল্টো দিকে।

সুতরাং

$$\begin{aligned}\int_{D_1} \frac{dz}{z} &= \int_{Q\alpha A} \frac{dz}{z} + \int_{AB} \frac{dz}{z} + \int_{B\gamma P} \frac{dz}{z} + \int_{PQ} \frac{dz}{z}, \\ \int_{D_2} \frac{dz}{z} &= \int_{A\beta Q} \frac{dz}{z} + \int_{QP} \frac{dz}{z} + \int_{P\delta B} \frac{dz}{z} + \int_{BA} \frac{dz}{z}.\end{aligned}$$

আরো লক্ষ করো--

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{dz}{z} &= \int_{Q\alpha A} \frac{dz}{z} + \int_{A\beta Q} \frac{dz}{z}, \\ \int_{C_2} \frac{dz}{z} &= \int_{P\gamma B} \frac{dz}{z} + \int_{B\delta P} \frac{dz}{z}.\end{aligned}$$

এ থেকেই দেখা যাচ্ছে যে, $\int_{D_1} \frac{dz}{z}$ আর $\int_{D_2} \frac{dz}{z}$ যোগ করলে ব্রীজের অংশদুটো কাটাকাটি হয়ে যাবে, এবং

$$\int_{D_1} \frac{dz}{z} + \int_{D_2} \frac{dz}{z} = \int_{C_1} \frac{dz}{z} - \int_{C_2} \frac{dz}{z}.$$

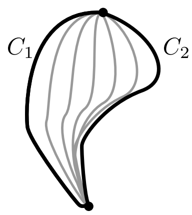


Fig 50

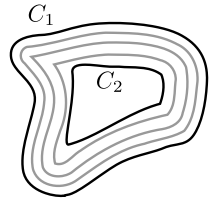


Fig 51

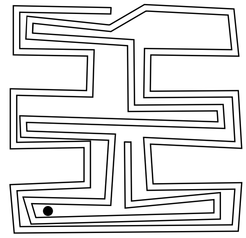


Fig 52

এবার লক্ষ করো যে, $\int_{D_1} \frac{dz}{z} = \int_{D_2} \frac{dz}{z} = 0.$ সুতরাং $\int_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_{C_2} \frac{dz}{z}$ হতে বাধ্য। ■

এখানে শিক্ষণীয় হল--

> ধরো $f(z)$ একটা function, আর দুটো simple closed contour দেওয়া আছে, C_1 আর C_2, একটার মধ্যে একটা। তাহলে C_1 আর C_2-র মাঝখানে একটা রিঙের মত জায়গা হবে। যদি সেইখানে এবং C_1, C_2-র উপরে $f(z)$-টা differentiable হয়, তবে $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ হবে।

22.3 অ্যানিমেশন দিয়ে ভাবা

আমরা এতক্ষণ যা শিখলাম সেটাকে অ্যানিমেশন দিয়ে চিন্তা করলে সুবিধা হতে পারে। কখনো কখনো সিনেমায় morphing নামে একরকম স্পেশাল এফেক্ট দেখায় যা দিয়ে একটা মানুষের মুখকে আরেকটা অন্য মানুষের মুখে, বা হয়তো একটা বাঘের মুখে পরিবর্তন করে দেয়। চোখের সামনে ক্রমশঃ পরিবর্তনটা হতে থাকে। আমরাও ঠিক সেইভাবে একটা contour-কে আরেকটা contour-এ পরিবর্তিত করব। একটা উদাহরণ রয়েছে Fig 50-এ। এখানে আমরা C_1-কে C_2-তে পরিণত করছি। যদি এই morphing-এর পথে সর্বত্র $f(z)$-টা differentiable থাকে, তবে $\int_{C_1} f(z)dz$ আর $\int_{C_2} f(z)dz$ সমান হতে বাধ্য। এইটাই হল Cauchy-Goursat theorem-এর মূল প্রয়োগ। এখানে অবশ্য morphing-এর সময়ে প্রান্তবিন্দু দুটো স্থির ছিল। সেইটা গুরুত্বপূর্ণ। আরেকরকম morphing-ও করা যায়, যদি দুটো contour-ই simple closed contour হয়। এরকম একটা উদাহরণ রয়েছে Fig 51-এ। এখানেও একই ব্যাপার, morphing-এর পথে কোথাও যদি $f(z)$-এর differentiability-র সমস্যা না হয়, তবে $\int_{C_1} f(z)dz$ আর $\int_{C_2} f(z)dz$ সমান হবে। লক্ষ করো, morphing-এর পথে C_2-র ভিতরের কোনো বিন্দু আসছে না, তাই সেখানে যদি $f(z)$-টা differentiable না হয় (বা এমন কি defined-ও না হয়), তাও কোনো অসুবিধা নেই।

22.4 প্রমাণ?

Cauchy-Goursat theorem আমরা ব্যবহার করছি বটে, কিন্তু এ বইতে প্রমাণ করব না। আসলে প্রমাণটার মধ্যে একটা অদ্ভুত ঝকমারি আছে--theorem-টার একটা শর্ত হল function-টাকে contour-টার "inside"-এ differentiable হতে হবে। এখানে "inside" কথাটার মানে কী? আমরা এতক্ষণ সহজ সহজ contour আঁকছিলাম বলে এ নিয়ে কোনো সমস্যা হচ্ছিল না। কিন্তু যদি Fig 52-এর মত কিছু একটা দিতাম, তবে ঠ্যালা বুঝতে! ভালো করে তাকিয়ে দ্যাখো, দেখবে যে Fig 52-এ যে contour-টা দেখিয়েছি সেটা সত্যিই closed এবং simple. এবার চট্ করে বলো তো যে বিন্দুটা দেখিয়েছি সেটা এই contour-টার ভিতরে নাকি বাইরে! এরকম গোলকধাঁধার মত contour-এর বেলায় ভিতর-বাইরে ঠাহর করা এমন শক্ত হয়ে ওঠে যে, সন্দেহ জাগে আদৌ এদের ভিতর-বাইরে বলে কিছু হয় কিনা। গণিতজ্ঞরা তো আবার প্রমাণ ছাড়া কিছুই মানতে চান না। তাই তাঁরা এই কথাটাও প্রমাণ করে নিতে চান যে, যেকোনো closed, simple contour-এরই একটা inside এবং একটা outside আছে। শুনলে অবাক হবে যে, জিনিসটা প্রমাণ করা বেশ শক্ত। শুধু তাই নয়, এটা অংকের দুনিয়ার অন্যতম বিখ্যাত theorem, নাম Jordan curve theorem. একেকটা জিনিস থাকে, যেগুলো সহজ বুদ্ধিতে মেনে নিতে কোনো আপত্তি থাকে না, কিন্তু প্রমাণ চেয়ে বসলে মুশকিলে পড়ে যেতে হয়। অংকের জগতের বাইরেও মাঝেসাঝে এমন বিভ্রাটে পড়তে হয়। একজন অবিবাহিত ভদ্রলোকের কথা জানি, তিনি জাপান যাবার জন্য ভিসা করাতে গিয়েছিলেন, ভিসা অফিসার ভদ্রলোকের অবিবাহিত হবার প্রমাণ চেয়ে বসেছিলেন। বিবাহিত হলে তার দলিল দস্তাবেজ থাকে, কিন্তু অবিবাহিত অবস্থা কী করে প্রমাণ হবে?

যাই হোক, closed, simple contour-এর inside-ঘটিত এই সমস্যার জন্যই আমরা Cauchy-Goursat theorem-এর প্রমাণের মধ্যে যাব না।

DAY 23
Cauchy Integral Formula (part 1)

হায়ার সেকণ্ডারীতে যে integration শিখেছিলে, সেখানে একেকটা integration কষতে ঘাম ছুটে যেত, কতরকম substitution, by parts ইত্যাদি প্রভৃতি করতে হত। কিন্তু contour integration-এর জগতে এরকম ঘাম ঝরানো ব্যাপার-স্যাপার নিয়ে খুব একটা সময় নষ্ট করা হয় না। এখানে খটোমটো integral-দেরকে আমরা ধাঁ করে প্যাঁচে ফেলে করে ফেলি। দুটো প্যাঁচ তো শিখেইছো-- contour-র কাঁটা-ছেঁড়া আর Cauchy-Goursat theorem. এবার আরেকটা মোক্ষম প্যাঁচ শিখব। তার নাম Cauchy integral formula. জিনিসটার দুটো সংস্করণ আছে।

23.1 প্রথম সংস্করণ

Cauchy integral formula

Let C be any simple closed contour in $\mathbb{C}$. Let f be any function differentiable on and inside C. Then for any point p inside C we have

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-p}dz.$$

Here the integral is in the counterclockwise direction.

এটা প্রমাণ করা ভীষণ শক্ত কিছু নয়। প্রমাণটা আমরা কালকে শিখব। তার আগে দেখি এটা দিয়ে কীরকম অংক করা যায়।

23.1.1 হাতেকলমে

Example 19: যদি C হয় 0-কে কেন্দ্র করে একটা circle, যার radius হল 2, তবে

(*i*) $\oint_C \frac{\sin z}{z-i}dz =?$ (*ii*) $\oint_C \frac{\sin z}{z-3i}dz =?$ আমরা এখানে C বরাবর counterclockwise দিকে যাচ্ছি।

SOLUTION: (*i*) এখানে $\sin z$-টা সর্বত্র differentiable, আরi রয়েছে C-এর ভিতরে। সুতরাং Cauchy integral formula বলছে

$$\int_C \frac{\sin z}{z-i}dz = 2\pi i \sin i.$$

(*ii*) দ্বিতীয় integral-টার বেলায় $3i$ রয়েছে C-এর বাইরে, সুতরাং integrand-টা C-এর উপরে এবং ভিতরে সর্বত্রই differentiable. তাই Cauchy-Goursat theorem বলেছে যে integral-টা 0 হতে বাধ্য। ■

Exercise 12: এবার C নাও একটা ellipse,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

তোমাকে বার করতে হবে $\int_C \frac{\sin z}{z^2+1}dz$.

HINT:
এখানে z^2+1-কে $(z-i)(z+i)$ আকারে ভেঙে নাও। তবে পাবে

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right).$$

এবার আগের অংকের মত এগোলেই হবে। ■

এই অংকটা যদি করতে পারো, তবে এই জাতীয় যেকোনো integral-ই কষতে পারবে--

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}dz,$$

যেখানে C একটা simple, closed contour, এবং a_i-রা সবাই distinct (অর্থাৎ, আলাদা আলাদা) এবং C-এর ভিতরে আছে। আর $f(z)$ এমন একটা function, যেটা C-এর উপরে এবং ভিতরে সর্বত্র differentiable. কায়দাটা হল

$$\frac{1}{(z-a_1)\cdots(z-a_n)} = \frac{b_1}{z-a_1} + \cdots + \frac{b_n}{z-a_n}$$

আকারে লিখে নেওয়া। এরকম $b_1, ..., b_n$ পাওয়া মোটেই শক্ত নয়। একটা উদাহরণ দিয়ে দেখাই। ধরো $n=3$. তবে দুইপাশকে $(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$ দিয়ে গুণ করে নিলেই পাবে

$$1 = b_1(z-a_2)(z-a_3) + b_2(z-a_1)(z-a_3) + b_3(z-a_1)(z-a_2).$$

চেহারাটা লক্ষ করো, যেখানে b_k আছে সেখানে $(z-a_k)$ নেই।
যদি $z=a_1$ বসাও, তবে ডানদিকে খালি b_1-ওয়ালা term-টাই পড়ে থাকবে, তা থেকে পাবে

$$b_1 = \frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}.$$

একইভাবে $z=a_2$ আর $z=a_3$ বসালে b_2 আর b_3 পেয়ে যাবে।
এই কায়দায় নীচের অংকটা করো তো!

Exercise 13: C যদি এই circle-টা হয়, $x^2+y^2=10$ তবে

$$\oint_C \frac{e^z}{z^3-1}dz = ?$$

অভিমুখটা এখানেও counterclockwise.
HINT: শুরুটা একটু ধরিয়ে দিই, $z^3-1=(z-1)(z\omega)(z-\omega^2)$, যেখানে $\omega \neq 1$ হল 1-এর একটা cube root. আরও মনে রেখো যে, $1+\omega+\omega^2=0$.
■

এবারের অংকটায় সামান্য প্যাঁচ আছে, কিন্তু সেটা একবার বুঝে গেলে অংকটা খাতাপেন ছাড়াই করে দেওয়া যায়!

Exercise 14: ধরো C হল একটা circle যার radius দেওয়া আছে $\frac{1}{2}$ আর centre বলা আছে 1. তবে $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}dz$ বার করো। ■

এতক্ষণ যে সব অংক করলাম সেখানে a_i-গুলো সব আলাদা আলাদা ছিল। কিন্তু কোনো অংকে এমন হতেই পারে যে, $(z-a_i)$ একাধিকবার এসেছে, যেমন এই অংকটায়

$$\int_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z-2)}dz.$$

এখানে $z-1$ এসেছে দুইবার। আমরা যে Cauchy integral formula শিখেছি, তা দিয়ে এরকম অংককে ঘায়েল করা শক্ত। সৌভাগ্যক্রমে Cauchy integral formula-র একটা generalisation আছে, যেটা এরকম ক্ষেত্রে কাজে লাগে। এর নাম Cauchy integral formula for derivatives. বার সেটাই শিখব।

23.2 দ্বিতীয় সংস্করণ

Cauchy integral formula for derivatives

Let C be any simple, closed contour in $\mathbb{C}$. Let f be any function differentiable on and inside C. Let p be any point inside C. Then for any $n = 0, 1, 2, ...$ the function $f(z)$ is differentiable at least n times at $z = p$, and we have

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz.$$

দেখতেই পাচ্ছ যে, $n = 0$ বসালে এটা আগের theorem-টায় পর্যবসিত হয়।
এবার এটা ব্যবহার করে কতরকম integration করা যায় দ্যাখো।

23.2.1 হাতেকলমে

Example 20: যদি C হয় $x^2+y^2=4$ তবে $\oint_C \frac{\sin z}{z^2}dz$ কত হবে?

Solution: আমরা জানি

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz.$$

এখানে $n = 1$ আর $f(z) = \sin z$ আর $p = 0$ বসালেই পাবে

$$\cos 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sin z}{z^2}dz.$$

সুতরাং উত্তর হল $2\pi i \times \cos 0 = 2\pi i$. ■

Example 21: আবার আগের অংকের C নিয়েই কাজ করছি। এবার বার করতে হবে

$$\int_C \frac{\sin z}{z(z-1)^2}dz.$$

SOLUTION: প্রথমেই এইভাবে লিখে নাও--

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2},$$

যেখানে A, B, C হল কিছু constant, যেগুলো আমরা একটু রাফ করে বার করে নেব। রাফে প্রথমে দুপাশকেই $z(z-1)^2$ দিয়ে গুণ করে নিলে পাবে

$$1 = A(z-1)^2 + Bz(z-1) + Cz.$$

এর মধ্যে $z = 1$ বসালে $C = 1$ পেয়ে যাবে, আর $z = 0$ বসালে $A = 1$ পাবে। এবার z-এর জায়গায় $0, 1$ ছাড়া কিছু একটা বসাও (ধরো $z = 2$)। অমনি পেয়ে যাবে $B = -1$. ব্যস, এই হল রাফ অংশটুকু। এবার সরাসরি দেখে নিতে পারো যে সত্যিই

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}.$$

হয়।
তাহলে আমাদের integral-টা তিনভাগে ভেঙে গেল--

$$\int_C \frac{\sin z}{z(z-1)^2} dz = \int_C \frac{\sin z}{z} - \int_C \frac{\sin z}{z-1} dz + \int_C \frac{\sin z}{(z-1)^2} dz.$$

Cauchy integral formula-র প্রথম সংস্করণটা লাগালে প্রথম ভাগটা পাবে $2\pi i \sin 0 = 0$, আর দ্বিতীয় ভাগটা হবে $2\pi i \sin 1$. তৃতীয় ভাগটার জন্য দ্বিতীয় সংস্করণটা লাগবে, সেটা আসবে $2\pi i \cos 1$. সুতরাং সব মিলিয়ে উত্তর হল

$$\int_C \frac{\sin z}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i(\sin 1 + \cos 1).$$

■

এই কায়দায় এইরকম চেহারার যেকোনো integral-ই কষে ফেলা যায়--

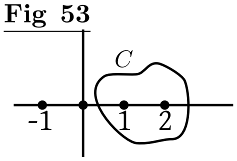
$$\int_C \frac{f(z)}{p(z)} dz,$$

যেখানে C একটা simple, closed contour, আর f হল C-এর উপরে আর ভিতরে সর্বত্র differentiable. নীচের তলার $p(z)$-টা হল একটা polynomial. এরকম integral পেলেই প্রথমে $p(z)$-টাকে factor-এ ভেঙে ভেঙে লিখবে--

$$p(z) = (z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}\cdots(z-a_k)^{n_k}.$$

এরকমটা সবসময়েই করা যাবে, যদিও সত্যি সত্যি হাতেকলমে a_i-গুলোকে বার করা সহজ নাও হতে পারে। যদি কোনো a_i ঠিক C-এর উপরে গিয়ে পড়ে, তবে integral-টা undefined হবে। তা যদি না হয়, তবে দ্যাখো কোন্ কোন্ a_i রয়েছে

Fig 53



C-এর বাইরে। সেগুলোকে $f(z)$-এর সঙ্গে মিশিয়ে নাও। যেমন ধরো যদি $\int_C \frac{f(z)}{z(z+1)^4(z-1)^2(z-2)^3}dz$ বার করতে চাও, যেখানে 0 আর -1 আছে C-এর বাইরে, আর 1 এবং 2 আছে C-এর ভিতরে (Fig 53), তবে এইভাবে লেখো--

$$\int_C \frac{f(z)}{z(z+1)^4(z-1)^2(z-2)^3}dz = \int_C \frac{g(z)}{(z-1)^2(z-2)^3}dz,$$

যেখানে $g(z) = \frac{f(z)}{z(z+1)^4}$. এইবার নীচের তলার জিনিসটাকে লিখতে পারবে এইভাবে--

$$\frac{1}{z(z+1)^4} = \frac{A}{z} + \frac{B_1}{z+1} + \frac{B_2}{(z+1)^2} + \frac{B_3}{(z+1)^3} + \frac{B_4}{(z+1)^4}.$$

এখানেও আগেরই মত রাফ করে A আর B_i-দের বার করে ফেলতে হবে (এইটা সবসময়েই করা যাবে, যদিও হাতেকলমে বার করতে মজা নাও লাগতে পারে)। ব্যস্, তারপর Cauchy integral formula লাগিয়ে গেলেই হল!

Exercise 15: $\oint_C \frac{z^2+3}{z^2(z-i)(z-3)}dz$ বার করো যেখানে C হল origin-কে centre করে 2 radius-এর circle-টা। ■

DAY 24
Cauchy Integral Formula (part 2)

এইবার আমরা Cauchy integral formula-র কিছু প্রয়োগ দেখব। এই প্রয়োগগুলো হল complex analysis-এর সবচেয়ে দ্রষ্টব্য জিনিসগুলোর মধ্যে অন্যতম।

24.1 প্রথম প্রয়োগ: mean value theorem

ধরো একটা function দিলাম $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (এখানে কিন্তু $\mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করছি, $\mathbb{C}$ নেই কোথাও)। বলে দিলাম যে এটা সর্বত্র differentiable, আরো বলে দিলাম যে, $f(1) = 1$ আর $f(3) = 3$, মানে $f(x)$-এর গ্রাফটা Fig 54-এর P আর Q বিন্দু দুটো দিয়ে যায়। খালি এইটুকু তথ্য থেকে বলতে পারবে $f(2)$ কত হবে? অসম্ভব! কারণ Fig 55 দেখলেই বুঝবে যে এরকম নানা $f(x)$ হতে পারে, তাদের বেলায় $f(2)$ আলাদা আলাদা। এবার $\mathbb{C}$-এর বেলায় কী হয় দ্যাখো। শুরু করছি একটা function নিয়ে $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, যেটা সর্বত্র differentiable বলা আছে। এবার $\mathbb{C}$-এর মধ্যে কোনো একটা simple, closed contour নাও C, আর তার ভিতরে একটা বিন্দু p নাও। যদি C-এর উপরের প্রতিটা বিন্দুতে $f(z)$-এর value বলে দিই, তবে কি তুমি তা থেকে $f(p)$ বার করতে পারবে? এবার কিন্তু উত্তর হল--হ্যাঁ, পারবে। কারণ Cauchy integral formula বলছে

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-p}dz,$$

এবং ডানদিকের integral-টা বার করার জন্য C-এর উপরে প্রতিটা বিন্দুতে $f(z)$-এর value জানাই যথেষ্ট।

Fig 54

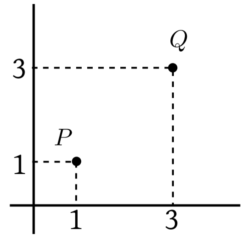


Fig 55

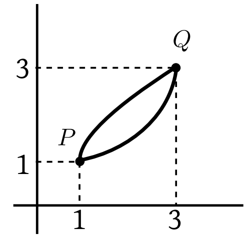
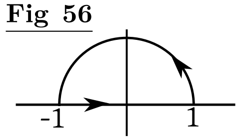


Fig 56



হাতেকলমে একটা অংক কষলে ব্যাপারটা ভালো করে মাথায় ঢুকবে।

Example 22: বলা আছে যে, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ এমন একটা differentiable function যাতে $f(e^{it}) = \cos(2t)+i\sin(2t)$ যখন $t \in [0, 2\pi]$. বলতে হবে $f(0)$ কত।

SOLUTION:আমরা C নেব unit circle-টা, যার parametrisation হল e^{it} যেখানে $t \in [0, 2\pi]$. তাহলে Cauchy integral formula অনুযায়ী

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it}} ie^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2t) + i\sin(2t)dt = \cdots = 0.$$

■

এবার নীচের অংকটা নিজে নিজে করো।

Exercise 16: আগের অংকের f-টাই নাও। তোমাকে বার করতে হবে $f\left(\frac{1}{2}\right)$ আর $f\left(\frac{i}{2}\right)$. ■

এই ব্যাপারটাকেই আরেকটু নাটকীয়ভাবে উপস্থাপিত করলে পাওয়া যায় complex analysis-এর **mean value theorem**, যার সঙ্গে real analysis-এর mean value theorem-এর বড় একটা সম্পর্ক নেই।

Mean value theorem

Let $f(z)$ be analytic on a simply connected region $D \subseteq \mathbb{C}$. Let $p \in D$. Let $C \subseteq D$ be the circle centred at p with radius $r > 0$. Then

$$f(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(p + re^{it})dt.$$

Simply connected মানে কী মনে আছে তো? একটা region-কে simply connected বলব, যদি ওর মধ্যে কোনো ফুটো না থাকে।

Proof:

By Cauchy integral formula we have

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-p}dz.$$

We parametrise C as $z(t) = p + re^{it}$ for $t \in [0, 2\pi]$.

Then

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-p}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(p+re^{it})}{re^{it}} rie^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(p + re^{it})dt,$$

as required.

[Q.E.D]

এখানে আমরা Cauchy integral formula-এর প্রথম সংস্করণটা ব্যবহার করলাম। যদি দ্বিতীয় সংস্করণটা লাগাই, তবে f-এর খালি value-ই নয়, যাবতীয় derivative অব্ধি বার করে দেওয়া যেত। সেই সংস্করণটা ছিল এইরকম--

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz.$$

নীচের অংকটা করার চেষ্টা করে দ্যাখো এটা মাথায় রেখে।

Exercise 17: বলা আছে যে, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ এমন একটা differentiable function যাতে $f(e^{it}) = cos2t + i(1+\sin 2t)$ যখন $t\in[0,\pi]$. আরো বলা আছে যে, $x\in\mathbb{R}$ হলে $f(x) = x^2+i$ হয়। বলতে হবে $f'\left(\frac{i}{2}\right)$ কত।
HINT:
Fig 56-এর মত contour নিলে সুবিধা হবে। ■

24.2 দ্বিতীয় প্রয়োগ: Liouville's theorem

এবার আরেকটা অদ্ভুত প্রয়োগ দেখব। ব্যাপারটা বোঝার জন্য একটা ছবি দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। Polynomial কাকে বলে মনে আছে নিশ্চয়ই? $2x^2-3x+5$ বা $x^{100}-x^{43}$ এই জাতীয় function. মানে যাদের চেহারা হল এইরকম--

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

যেখানে a_i-রা হল সবাই কিছু সংখ্যা। আমাদের আলোচনায় আমরা ওদেরকে real number নেব, এবং x-ও আমাদের এই আলোচনায় সর্বদা real নেব, যাতে গ্রাফ দিয়ে চিন্তা করা যায়। Polynomial-দের গ্রাফ কীরকম হয় জানো কি? যদি খালি constant term-টাই থাকে, মানে $a_1, a_2, \ldots$ ইত্যাদিরা সবাই শূন্য হয়, তবে বুঝতেই পারছ যে $f(x) = a_0$, একটা constant. তাই গ্রাফটা হবে একটা horizontal লাইন। কিন্তু যদি $a_1, a_2, \ldots$ ইত্যাদিদের মধ্যে একজনও nonzero হয়, অমনি গ্রাফটা হয় উঠতে উঠতে ∞-র দিকে ছুটবে, নয়তো নামতে নামতে $-\infty$-র দিকে যাবে। সুতরাং ∞ বা $-\infty$-র দিকে হাত বাড়ায় না এমন polynomial মানেই সেটা একটা constant হতে বাধ্য। অর্থাৎ polynomial-দের গ্রাফ হয় সটান horizontal, নয়তো সামান্য ওঠানামা থাকলেই ব্যাপারটা ∞ বা $-\infty$ অব্ধি গড়ায় (মানে unbounded হয়ে যায়)। ঠিক একই ব্যাপার লক্ষ করা যায় complex ক্ষেত্রেও, খালি সেখানে polynomial-এর দরকার নেই, যেকোনো differentiable function-এর আচরণই এরকম। গুছিয়ে লিখলে পাবে নীচের theorem-টা, যার পোশাকি নাম Liouville's theorem (মনে রেখো, Liouville-এর উচ্চারণ হল লুইভিল)।

Liouville's theorem

Let $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ be differentiable everywhere. Then it is either constant or unbounded.

হঠাৎ দেখলে মনে হতে পারে, এর সঙ্গে Cauchy integral formula-র সম্পর্ক কোথায়? আসলে Cauchy integral formula দিয়ে প্রমাণ করা যায় এই theorem-টা।

Proof: আমাদের দেখাতে হবে যে, f-টা হয় constant নয়তো unbounded. এরকম "এটা নয়তো ওটা"-জাতীয় জিনিস প্রমাণ করার ক্ষেত্রে সাধারণতঃ "একটা নয়" ধরে নিয়ে "অন্যটা"-কে প্রমাণ করা হয়। আমরা unbounded নয় ধরে প্রমাণ করব constant.

Let f be bounded (by $M>0$, say), ie, $\forall z\in\mathbb{C}\quad |f(z)|\leq M$.
Shall show that f is constant, ie,

◎ $\forall p\in\mathbb{C}\quad f(p)=f(0).$

$\forall p$ Take any $p\in\mathbb{C}$.

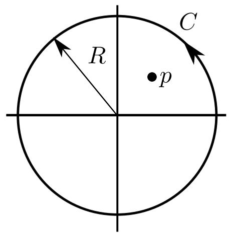


Fig 57

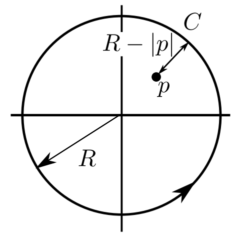


Fig 58

আমরা এবার Cauchy integral formula লাগাব, তার জন্য একটা contour চাই, p-টা যার ভিতরে থাকে। আমরা contour-টাকে নেব origin-এ centre করে একটা circle. যথেষ্ট বড় radius নিতে হবে, যাতে p-টা circle-এর ভিতরে থাকে (Fig 57)।

> Let R be any positive real number $> |p|$.
> Let C be the circle centred at 0 with radius R.
> Thus, C is given by $z(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

এবার আমরা Cauchy integral formula লাগানো শুরু করব--

> Then, by Cauchy integral formula,
>
> $$\begin{aligned} f(p) - f(0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-p}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-0}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)p}{z(z-p)}dz \\ &= \frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{e^{it}(Re^{it}-p)}e^{it}dt. \end{aligned}$$

এবার আমরা একটু triangle inequality লাগাব।

So, by triangle inequality,

$$\begin{aligned}
|f(p)-f(0)| &\leq \frac{|p|}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(Re^{it})|}{|Re^{it}-p|}dt \quad [\because |e^{it}|=1] \\
&\leq \frac{|p|}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M}{|Re^{it}-p|}dt \\
&\leq \frac{|p|M}{2\pi(R-|p|)}\int_0^{2\pi}dt
\end{aligned}$$

এই জায়গাটা Fig 58 দেখে বুঝে নাও। এখানে p থেকে C-এর সবচেয়ে কাছের বিন্দুটার দূরত্ব হল $R-|p|$.

$$= \frac{|p|M}{R-|p|}.$$

এবার একটা শেষ কৌশল আছে--

Since this holds for all $R>|p|$, we can let $R\to\infty$. Then $\frac{|p|M}{(R-|p|)}\to 0$, completing the proof.

[Q.E.D]

এই theorem-টা কাজে লাগিয়ে অনেক অদ্ভুত অংক বানানো যায়। কিছু স্বাদ দিই।

Example 23: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ বলা আছে সর্বত্র differentiable এবং $\forall z\in\mathbb{C}\quad |f(z)|\leq 5$. তবে $f(i)-f(2i)+f(3i)-f(4i)$ কত হবে?

Solution: f-টা সর্বত্র differentiable এবং bounded, অতএব Liouville's theorem বলছে f-টা constant হতে বাধ্য, ধরো constant-টা হল c, মানে $\forall z\in\mathbb{C}\quad f(z)=c$.
সুতরাং $f(i)-f(2i)+f(3i)-f(4i)=c-c+c-c=0$. ■

এবার তোমার পালা--

Exercise 18: ধরো f-টা $\mathbb{C}$-এর সর্বত্র differentiable, এবং $\forall z\in\mathbb{C}\quad |f(z)|\leq e^{-|z|}$. তবে $f(i)=?$ ■

Example 24: ধরো f-টা $\mathbb{C}$-এর সর্বত্র differentiable, এবং $|z|>10$ হলে $|f(z)|\leq 1$. তবে $f'(i)=?$ ■

24.3 তৃতীয় প্রয়োগ: fundamental theorem of algebra

ধরো একটা polynomial দিলাম $p(x)=x^2+1$. এর জন্য x-এর এমন একটা real value দিতে পারো যাতে $p(x)=0$ হয়? অসম্ভব। কিন্তু যদি x-কে complex value নিতে দাও, তবে কোনো অসুবিধা নেই, $x=-i$ এবং $x=i$ নিতে পারবে। এই ব্যাপারটা যে কোনো polynomial-এর বেলাতেই দেখা যায়, এমন কি তার coefficient-গুলো complex সংখ্যা হলেও। এরকম যাই polynomial নাও না কেন (ধরো $p(z)$), তবে z-এর এমন একটা complex value পাবেই যাতে $p(z)=0$ হয়। এইটাই হল fundamental theorem of algebra. এই জিনিসটা Liouville's theorem দিয়ে টুক্ করে প্রমাণ করে ফেলা যায়!

Fundamental theorem of algebra

Let $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ be a non-constant polynomial. Then $\exists r\in\mathbb{C}$ such that $p(r)=0$.

Proof:

Let, if possible, $\forall z\in\mathbb{C}\quad p(z)\neq 0$. Then $f(z)=\frac{1}{p(z)}$ is an entire function from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}$.

Now $|p(z)|\to\infty$ as $|z|\to\infty$.

⟦ Because:

For any $n\in\mathbb{N}$ and for any complex $\alpha\neq 0$ we have $|\alpha z^n|\to\infty$ as $z\to\infty$.

⟧

যেহেতু $z\to\infty$ হলে (মানে z যতই দিগন্তরেখার দিকে ছড়িয়ে পড়ছে), ততই $|p(z)|$ অবাধে বাড়ছে, তাই একটা পর্যায়ের পরে $|p(z)|\geq 1$ হতে বাধ্য।

Hence $\exists R>0\ \forall z\in\mathbb{C}\quad (|z|>R\implies |p(z)|\geq 1)$.

So if $|z|>R$ then $|f(z)|\leq 1$.

তার মানে $|z|>R$ হলে f-টা bounded হয়ে গেল। আর $|z|\leq R$ হলে তো bounded হবেই, কারণ--

Also, since f is continuous, hence $\exists M>0\quad \forall z\in\mathbb{C}\quad (|z|\leq R\implies |f(z)|\leq M)$.

অতএব দুইয়ে মিলিয়ে--

So $f(z)$ is bounded on $\mathbb{C}$.

Hence by Liouville's theorem, $f(z)$ must be constant. So $p(z)=\frac{1}{f(z)}$ must be constant $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

[Q.E.D]

Fig 59

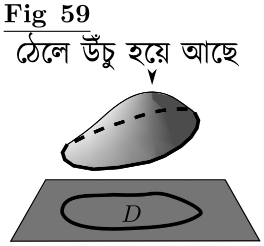
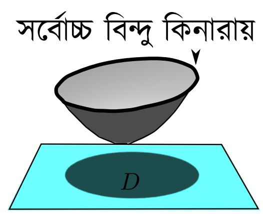


Fig 60



DAY 25
Cauchy Integral Formula (part 3)

25.1 চতুর্থ প্রয়োগ: maximum modulus principle

এবার একটা প্রয়োগ দেখব, যেটা ছবি দিয়ে ভাবতে সহজ। ধরো একটা $f(z)$ দেওয়া আছে যেটা কোনো একটা region $D \subseteq \mathbb{C}$-এর উপরে analytic. আমরা এখন মাথা ঘামাব $|f(z)|$ দেখতে কীরকম হবে সেটা নিয়ে। যেহেতু $|f(z)|$ হল একটা real সংখ্যা, তাই $|f(z)|$-এর গ্রাফ আঁকা যাবে। এরকম গ্রাফ দেখতে হবে একটা surface-এর মত, যেন একটা রুমাল ঢেউ খেলিয়ে শূন্যে ভেসে আছে। একটা গ্রাফ দেখিয়েছি Fig 59-এ। লক্ষ করো মধ্যিখানটা কেমন চূড়ার মত ঠেলে উঁচু হয়ে আছে। আশ্চর্যের কথা হল আমাদের $|f(z)|$-এর গ্রাফ আসলে কখনোই এরকম হতে পারে না! পুরো surface-টার মধ্যে সর্বোচ্চ বিন্দু যদি কিছু থাকে, তবে সেটা অতি অবশ্যই কিনারায় থাকতে বাধ্য! এরকম একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 60-এ। এই ব্যাপারটাকেই বলে **maximum modulus principle.**

এইবার আমরা maximum modulus principle-কে গুছিয়ে লিখে প্রমাণ করব। কাজটা দুটো অংশে ভেঙে করলে সুবিধা হবে।

Maximum modulus principle (part 1)

Let D be a simply connected nonempty open set in $\mathbb{C}$. Let f be differentiable everywhere on D. If $|f|$ attains a maximum in D, then f must be constant on D.

ছবি দিয়ে যেটা বলেছিলাম, তার সঙ্গে এর সম্পর্কটা বুঝে নাও। $|f(z)|$-এর গ্রাফ মাঝখানে কোথাও ঠেলে উঠতে পারে না। তাই কোথাও যদি maximum হয়, তো সর্বত্রই সেই উচ্চতায় থাকবে, একেবারে সমতল ছাদের মত। আমরা আগেই Cauchy-Riemann equation দুটোর প্রয়োগ শেখার সময়ে বলেছিলাম যে $f(z)$ যদি D-এর উপরে differentiable হয়, তবে f-টা constant হওয়া আর $|f|$ -টা constant হওয়া একই কথা।

প্রমাণটা বেশ প্যাঁচালো। ঠাণ্ডা মাথায় বুঝে বুঝে পড়।

Proof:

> Step 1: Shall show that $|f|$ is constant on D.
> Let $|f|$ be maximum on D at $p \in D$.
> Let $M = |f(p)|$.
> Let, if possible, $\exists q \in D \quad |f(q)| \neq M$.

যেহেতু M হল গিয়ে maximum, তাই $|f(q)| \neq M$ মানে হল--

> Then $|f(q)| < M$.

এইবার প্রমাণের আসল প্যাঁচ শুরু হবে। যেহেতু D-টা connected, তাই q থেকে p পর্যন্ত একটা লাইন টানতে পারবে।

> Since D is connected, hence there is a continuous curve $z(t)$ for $t \in [a, b]$
> with $z(a) = q$ and $z(b) = p$.

এই লাইনটা বরাবর q থেকে p-এর দিকে যেতে থাকো। প্রতিটা বিন্দুতে $|f(z)|$ কত হচ্ছে খেয়াল রাখতে রাখতে যাও। শুরুতে, মানে q-তে $|f(z)| < M$ ছিল, তারপর ক্রমশঃ বাড়তে বাড়তে p-তে গিয়ে $|f(z)| = M$ হয়েছে।

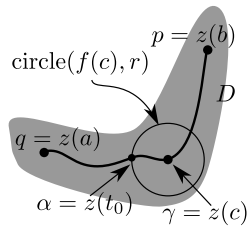


Fig 61

> The function $F(t) = |f(z(t))|$ is the composition of continuous functions, and hence is continuous on $[a, b]$.

আমরা দেখব চলার পথে ঠিক কোথায় $|f(z)|$-টা প্রথম M হয়। সেটা হবে এই সেটটার infimum.

> Consider the set $A = \{t \in [a, b] \ : \ F(t) = M\}$.

অবশ্য $\inf(A)$ নিয়ে কাজ করার আগে দেখিয়ে রাখতে হবে যে $\inf(A)$ আদৌ আছে, মানে $A \neq \phi$ এবং A-টা bounded from below.

> Then $A \neq \phi$, since $b \in A$. Also A is bounded from below (by a).
> So $c = \inf A$ exists.
> Since $F(t)$ is continuous, and $\forall t \in (c, b] \quad F(t) = M$,
> hence $F(c) = \lim_{t \to c+} F(t) = M$.

এইবার আমরা দেখাব যে, আসলে এরকম c থাকতেই পারে না (এবং সেই contradiction দিয়েই এই ধাপটা শেষ হবে)।

> Clearly, $c \neq a$.
>
> ⟦ Because:
>
> $F(c) = M$ and $F(a) = |f(q)| < M$.
>
> ⟧
>
> Let $\gamma = f(c)$.

এবার আমরা γ-কে centre করে একটা ছোট্টো গোল আঁকব। গোলটা এমনভাবে আঁকব যাতে পুরোটাই D-এর ভিতরে থাকে (সেটা করা যাবেই, কারণ D তো open))। আরও লক্ষ রাখব, যাতে q-টা গোলটার বাইরে থাকে (Fig 61)। সেটাও করা যাবেই, কারণ যদি q-টা নেহাত গোলের মধ্যে ঢুকেই পড়ে, তবে গোলটাকে আরো ছোটো করে আনলেই চলবে।

> Since D is open, hence $\exists r > 0 \quad \text{circle}(\gamma, r) \subseteq D$ and q is outside $\text{circle}(\gamma, r)$.
> Here $\text{circle}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w - z| = r\}$.

এবার q থেকে পায়ে পায়ে চলতে থাকো। দ্যাখো কখন প্রথম গোলটাতে ঢুকছ। সেই মুহূর্তটাকে t_0 নাম দেব, আর গোলটার পরিধিতে তোমার প্রথম পদক্ষেপ যেখানে পড়ল সেখানটার নাম দেব α.

> Hence $\exists t_0 \in [a, c) \quad z(t_0) \in \text{circle}(c, r)$.
> Let $\alpha = z(t_0)$.
> Since $t_0 < c$, hence $|f(\alpha)| < M$.

তার মানে গোলটার পরিধিতে এমন একটা বিন্দু পেয়ে গেলাম যেখানে $|f(z)|$-টা M-এর চেয়ে ছোটো। যেহেতু $|f(z)|$ হল continuous, তাই খানিকটা জায়গা জুড়েই $|f(z)| < M$ হবে বাধ্য। এটাকেই একটু গুছিয়ে লিখব এবার--

> Let $\delta = M - |f(\alpha)| > 0$.
> Since f is continuous, hence there is an arc B of $\text{circle}(c, r)$ over which $|f(z)| < M - \frac{\delta}{2}$.
> By Cauchy integral formula,
>
> $$f(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{circle}(\gamma,r)} \frac{f(z)}{z-\gamma}dz$$
> $$= \frac{1}{2\pi i}\int_B \frac{f(z)}{z-\gamma}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{circle}(\gamma,r)\setminus B} \frac{f(z)}{z-\gamma}dz$$
>
> এখানে আমরা $\text{circle}(\gamma, r)$-কে দুভাগে ভেঙে নিয়েছি।
>
> $$\therefore |f(c)| \leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_B \frac{f(z)}{z-\gamma}dz\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\text{circle}(\gamma,r)\setminus B} \frac{f(z)}{z-\gamma}dz\right| \quad \text{[by triangle inequality]}$$
>
> এটা complex সংখ্যাদের সাধারণ triangle inequality.
> এবার estimation theorem লাগাব--
>
> $$\text{or } M \leq \frac{1}{2\pi r}\left(M - \tfrac{\delta}{2}\right) \times \text{length}B + \frac{1}{2\pi r}M \times \text{length}(\text{circle}(\gamma, r) \setminus B)$$
>
> [by estimation theorem]
> সাবধান, এখানে $z \in \text{circle}(\gamma, r)$ আছে, তাই $|z - \gamma| = r$ হচ্ছে।
>
> $$< \frac{1}{2\pi r}M \times \text{length}(B) + \frac{1}{2\pi r}M \times \text{length}(\text{circle}(\gamma, r) \setminus B)$$
> $$= \frac{1}{2\pi r}M \times \text{length}(\text{circle}(\gamma, r)) = \frac{1}{2\pi r}M \times 2\pi r = M.$$
>
> Thus $M < M (\Rightarrow\Leftarrow)$.

এই হল প্রথম ধাপ, যেখানে আমরা দেখালাম $|f|$-টা constant. দ্বিতীয় ধাপে দেখাব f-টা নিজেই constant. সেটা আসলে আগেই দেখিয়েছিলাম Cauchy-Riemann equation দুটো দিয়ে। সেটুকু উল্লেখ করে ছেড়ে দেব খালি।

> Step 2: Since f is analytic, and $|f|$ is constant, hence by the Cauchy-Riemann equations, f must be constant, as required.

[Q.E.D]

এবার আমরা maximum modulus principle-এর দ্বিতীয় অংশ প্রমাণ করব, যেটা বলে যে কোথাও চূড়া থাকলে সেটা কিনারাতেই থাকবে। প্রমাণটা খুবই ছোট্টো, প্রথম অংশটা ব্যবহার করলেই হয়ে যাবে।

Maximum modulus principle (part 2)

Let f be differentiable everywhere on a simply connected, bounded, nonempty open set $D \subseteq \mathbb{C}$. Let C be the boundary of D. Let f be continuous on $D \cup C$. Then $|f|$ must attain its maximum over $D \cup C$ at some point in C.

এখানে ভাষার একটা প্যাঁচ আছে। বলে দিয়েছে f-টা D-এর উপরে differentiable, অতএব continuous on D-ও বটে। তাহলে পরে যেখানে "Let f be continuous on $D \cup C$" লিখেছি সেখানে খালি "continuous on C" বললেই কি হত না? না, হত না। কারণ "continuous on $D \cup C$" হলে একটা বাড়তি জিনিস পাওয়া যায়-- যদি $z \in D$ কোনো $\ell \in C$-এর দিকে এগোয়, তাহলেও $f(z) \to f(\ell)$ হবে। আলাদা করে "continuous on D" এবং "continuous on C" বললে সেটা পেতাম না।

Proof:

> Here $D \cup C$ is closed.

এটা প্রমাণ করা সহজ, কিন্তু তার জায়গা এটা নয়। ব্যাপারটা এই--যদি $D \cup C$-এর কোনো limit point নাও, সেটা তো আর boundary-র বাইরে গিয়ে পড়তে পারে না, $D \cup C$-এর মধ্যেই থাকবে। অতএব $D \cup C$-টা closed হবে।

> Also since D is bounded, so is $D \cup C$.
>
> Since $|f|$ is a continuous function on closed and bounded $D \cup C$, hence it must attain maximum at some $p \in D \cup C$.

এবার দেখাব যে এরকম একটা p আমরা পাব C-এর মধ্যে। সাবধান, $p \in C$ হতে বাধ্য বলছি না কিন্তু, বলছি যে এরকম একটা $p \in C$ পাওয়া যাবে। যেহেতু $p \in D \cup C$ পেয়ে গেছি, তাই দুটো কেস হতে পারে--

> Case 1: $p \in C$: Nothing to prove.
>
> Case 2: $p \in D$: By the maximum modulus principle (part 1) f must be constant on D. Due to continuity over $D \cup C$, it must be constant over $D \cup C$ also. So $|f|$ attains maximum everywhere, and hence at any point in C also.

[Q.E.D]

DAY 26
Cauchy integral formula (part 4)

আজকে আমরা Cauchy integral formula প্রমাণ করব।

26.1 Cauchy integral formula-র প্রমাণ

শুরু করব একটা পরিচিত জিনিস দিয়ে--

THEOREM

Let C be any simple closed contour in $\mathbb{C}$. Let p be any point inside C. Then

$$\oint_C \frac{dz}{z-p} = 2\pi i.$$

Proof: আমরা প্রথমেই C-কে একটু ভদ্রসভ্য করে নেব Cauchy-Goursat theorem দিয়ে।

> Let D be the unit circle centred at p. Then, by Cauchy-Goursat theorem,
>
> $$\oint_C \frac{dz}{z-p} = \oint_D \frac{dz}{z-p}.$$

এবার D-কে $z(t)$ আকারে লিখে নেব।

> Let us express D by $z(t) = p + e^{it}$ for $t \in [0, 2\pi]$.
> Then
>
> $$\oint_C \frac{dz}{z-p} = \oint_D \frac{dz}{z-p} = \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$
>
> as required.

[Q.E.D]

এইবার আমরা Cauchy integral formula প্রমাণ করব। তার জন্য theorem-টা আরেকবার লিখে নিই--

Cauchy integral formula

Let C be any simple closed contour in $\mathbb{C}$. Let f be any function differentiable on and inside C. Then for any point p inside C we have

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-p} dz.$$

Proof: দুটো সংখ্যাকে সমান দেখানোর নানা কায়দা আছে। তার মধ্যে একটা হল এই--যদি a, b এমন দুটো সংখ্যা হয় যাতে যাই $\epsilon > 0$ নাও না কেন, সর্বদাই $|a - b| < \epsilon$ হয়, তবে $a = b$ হতে বাধ্য। আমরা এই কায়দাটাই এখানে ব্যবহার করব। সুতরাং আমরা দেখাব--

Shall show $\forall\epsilon > 0 \quad \left|f(p) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-p}dz\right| < \epsilon,$

এইটাকে একটু সাজিয়ে লেখা যায়--

Now

$$\begin{aligned} f(p) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-p}dz &= \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i f(p) - \int_C \frac{f(z)}{z-p}dz\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(f(p)\int_C \frac{dz}{z-p} - \int_C \frac{f(z)}{z-p}dz\right) \quad \left[\because \int_C \frac{dz}{z-p} = 2\pi i\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_C \frac{f(p)}{z-p}dz - \int_C \frac{f(z)}{z-p}dz\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(p)-f(z)}{z-p}dz. \end{aligned}$$

So enough to show that

$\forall\epsilon > 0 \quad \left|\int_C \frac{f(z)-f(p)}{z-p}dz\right| < \epsilon.$

প্রথমেই $\forall\epsilon > 0$ আছে, সুতরাং--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার কী করব বুঝে নাও। Integral-এর ভিতরের ওই $\frac{f(z)-f(p)}{z-p}$-টা দেখেই যেটা মনে পড়া উচিত সেটা হল $z \to p$ হলে ওটা $f'(p)$-এর দিকে যাবে। এবার আমরা estimation theorem কাজে লাগাব--একটা bounded function-কে একটা ছোট্টো contour-র উপর integrate করলে উত্তরটাও ছোট্টো হবে।

প্রথমে তাহলে দেখাতে হবে যে, $\frac{f(z)-f(p)}{z-p}$-টা bounded. সেটা বোঝাই যায়, কারণ ওটা $f'(p)$-এর দিকে যায়, অতএব $|f'(p)|$-এর চেয়ে খানিকটা বড় কিছু দিয়ে bound করা যাবে--

Since $\frac{f(z)-f(p)}{z-p} \to f'(p)$ as $z \to p$,

hence $\exists\delta > 0 \quad \forall z \in N(0,\delta) \quad \left|\frac{f(z)-f(p)}{z-p}\right| < |f'(p)| + 1 = M,$ say.

ব্যস্, একটা bound পেয়ে গেলাম।

এইবার আমরা contour-টাকে ক্রমশঃ ছোটো করে আনব। এটা সেই অ্যানিমেশনের গল্প, মানে Cauchy-Goursat theorem-এর গল্প। ফাঁসটা যতই টাইট করে আনো না কেন, integral-টা বদলাবে না। যদি টাইট করার পর contour-টার দৈর্ঘ্যটাকে ℓ নাম দিই, তবে estimation theorem অনুযায়ী integral-টার modulus অবশ্যই $\leq M\ell$ হবে। এটাকে ϵ-এর সমান রাখলেই হবে। সুতরাং $\ell = \frac{\epsilon}{M}$ পর্যন্ত টাইট করাই যথেষ্ট। তার মানে এমন একটা contour চাই, যার দৈর্ঘ্য হল এই ℓ, এবং p বিন্দুটা যার ভিতরে আছে। এরকম বিস্তর contour আছে। অংকের ভাষায় সবচেয়ে সহজে প্রকাশ করা যাবে যদি contour-টাকে একটা circle নিই, যার centre হল p. পরিধিটাকে ℓ চাই, তাই radius নেব $r = \frac{\ell}{2\pi} = \frac{\epsilon}{2M\pi}$.

Let D be the circle centred at p and having radius $r = \frac{\epsilon}{2M\pi}$.

ব্যস্, এবার প্রমাণটা গড়গড়িয়ে এগোবে--

Then, by Cauchy-Goursat theorem, $\int_C \frac{f(z)-f(p)}{z-p}dz = \int_D \frac{f(z)-f(p)}{z-p}dz$.
But by the estimation theorem,

$$\left|\int_D \frac{f(z)-f(p)}{z-p}dz\right| \leq M \times \text{length}(D) = M \times 2\pi r = \epsilon,$$

as required.

[Q.E.D]

26.2 Cauchy integral formula for derivatives-এর প্রমাণ

এবার কতকটা একই কায়দায় আমরা Cauchy integral formula for derivatives-ও প্রমাণ করব। প্রথমে theorem-টা আরেকবার লিখে নিই--

Cauchy integral formula for derivatives

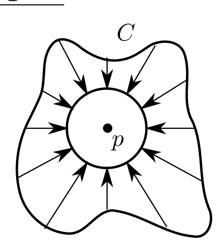
Let C be any simple, closed contour in $\mathbb{C}$. Let f be any function differentiable on and inside C. Let p be any point inside C. Then for any $n = 0, 1, 2, ...$ the function $f(z)$ is differentiable at least n times at $z = p$, and we have

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz.$$

Proof: এই প্রমাণটা কিন্তু আগের প্রমাণটার চেয়ে অনেকটাই বেশী জটিল। পড়তে পড়তে মাথা গুলিয়ে যাওয়া খুবই স্বাভাবিক। হাতের কাছে এক গ্লাস জল রাখতে পারো, খাবার জন্য বা মাথায় ঢালার জন্য!
আমরা এগোব n-এর উপরে induction লাগিয়ে। যদি $n = 0$ হয়, তবে সাধারণ Cauchy integral formula ফিরে পাব, যেটা এক্ষুণি প্রমাণ করলাম।

(Induction on n):
Induction basis: If $n = 0$, then this is Cauchy integral formula, which is already proved above.
Induction hypothesis: We assume up to $n-1$ for some $n \geq 1$.

Fig 62



<u>Induction step:</u> Shall show for n, ie, shall show

$$\frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(p)}{z-p} \to \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw$$

as $z \to p$,

লক্ষ করো, এতে এক ঢিলে দুই পাখী মারা যাবে, derivative-এর existence এবং ফর্মুলাটা দুটোই এ থেকে এসে যাচ্ছে। এবার পুরো জিনিসটাকে ϵ, δ দিয়ে লিখে নিই--

ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in N(p,\delta) \quad \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(p)}{z-p} - \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw \right| < \epsilon.$$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার আমরা ধাপে ধাপে এগোব। প্রথম ধাপটা ছোট্টো, কিন্তু গুরুত্বপূর্ণ। এখানে আমরা induction hypothesis ব্যবহার করে পুরোটাকে একটা integral-এর ছাতার তলায় আনব।

<u>Step 1</u>: By the induction hypothesis,

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(p) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-p)^n}dw \\ f^{(n-1)}(z) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^n}dw. \end{aligned}$$

দুটোই আসলে একই জিনিস, একবার p দিয়ে লিখেছি, পরের বার z দিয়ে।

Hence

$$\begin{aligned} &\frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(p)}{z-p} - \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C f(w) \underbrace{\left(\frac{(w-z)^{-n} - (w-p)^{-n}}{z-p} - n(w-p)^{-(n+1)} \right)}_{A} dw \qquad (1) \end{aligned}$$

এই সঙ্গে contour-টাকেও একটু সুন্দর করে ফেলা যাক। C-টা কীরকম দেখতে আমরা জানি না, খালি জানি ওটা একটা simple, closed contour, এবং p বিন্দুটা ওর ভিতরে আছে। আমরা যদি Fig 62-এর মত C-টাকে সংকুচিত করে p-তে centre-ওয়ালা একটা circle করে নিই, তবে Cauchy-Goursat theorem বলছে যে integral-টা মোটেই বদলাবে না। Radius-টা কত সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়, খালি যেন C-এর ভিতরে এঁটে যায়।

Since p is inside C, and the region inside C is open (by Jordan curve theorem),

hence $\exists r_1 > 0 \quad \text{circle}(p, r_1)$ is inside C.

> By Cauchy-Goursat theorem, the integral will not change if C is replaced by $\text{circle}(p, r)$ for any $r \in (0, r_1)$.

এবার কী করব শোনো। ওই integral-টাকে $< \epsilon$ দেখাতে হবে। একটা integral-কে ছোটো দেখানোর প্রধান হাতিয়ার হল estimation theorem. সেই theorem-টা কাজে লাগানোর জন্য আমরা integrand-এর modulus-টাকে খুব ছোটো দেখাব।
Integrand-টার দুটো অংশ, $f(w)$ আর ওই বাকি অংশটা যেটাকে A নাম দিয়েছি। আমরা প্রথমে $f(w)$-কে bounded দেখাব। তারপর দেখাবো যে $r \to 0$ হলে $|A| \to 0$ হবে। প্রথমে $f(w)$-কে bounded দেখানো--

> Step 2: Since f is continuous at p, hence $f(w) \to f(p)$ as $w \to p$.
> Thus,
> $$\exists r \in (0, r_1) \quad \forall w \in \text{circle}(p, r) \quad |f(w)| \leq |f(p)| + 1. \tag{2}$$
> We shall keep this r fixed, and let $D = \text{circle}(p, r)$.

ব্যস্, এই ধাপটা শেষ। এর পর আমাদের কাজ হল $|A|$-কে খুব ছোটো দেখানো, এবং সে কাজটা খুব একটা সহজ নয়। এইখানে একটা ভুলের ব্যাপারে সাবধান। সেই ভুলটা করলে $|A|$-কে ছোটো দেখানোটা অত্যন্ত চট্ করে হয়ে যাবে--

> যদি $g(z) = (w - z)^{-n}$ নিই, তবে লক্ষ করো $A = \frac{g(z)-g(p)}{z-p} - g'(p)$. যেহেতু আমরা জানি $\lim_{z\to p} \frac{g(z)-g(p)}{z-p} = g'(p)$, তাই $z \to p$ হলে $|A| \to 0$ হবে।

কিন্তু এই যুক্তিতে একটাই সমস্যা। এখানে $g(z)$-টা আসলে w-এর উপরেও নির্ভর করে। প্রতিটা fixed w-এর জন্য এমন $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যাতে $z \in N(p, \delta)$ হলে $|A|$-টা ছোটো হয়, কিন্তু আমাদের কাজ করতে হবে D-এর উপর যাবতীয় w নিয়ে। তাই আমাদের এমন কোনো $\delta > 0$ পেতে হবে, যেটা সব w-র জন্যই কাজ করে। সেই কারণে আমাদের অনেকটা বাড়তি পরিশ্রম করতে হবে।
এখানেও সেই কায়দাটা আবার করব, দুটো অংশে ভেঙে একটা অংশকে bounded দেখানো আর অন্য অংশটাকে ছোটো দেখানো। এখানে ভাঙাটা হবে এইভাবে--

$$A = (z - p) \times \frac{A}{z - p}.$$

এদের মধ্যে $z \to p$ হলে যে $z - p \to 0$ হয়, সেটা তো বলাই বাহুল্য। লড়াইটা হবে $\frac{A}{z-p}$-কে bounded দেখানো নিয়ে। তার জন্য গোড়ায় $\frac{A}{z-p}$-কে একটু সাজিয়ে লিখলে সুবিধা হবে। সেটাই আমরা করব এবারের ধাপে। এই ধাপটাই সবচেয়ে বিচ্ছিরি। এখানে একটা জিনিস মনে রেখো-- যদি a, b যেকোনো দুটো সংখ্যা হয়, আর $m \in \mathbb{N}$ হয়, তবে $a^m - b^m$-এর ভিতর থেকে একটা $a - b$ নিংড়ে বার করা যায়--

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}. \tag{*}$$

এই ব্যাপারটা আমরা দুবার কাজে লাগাব।

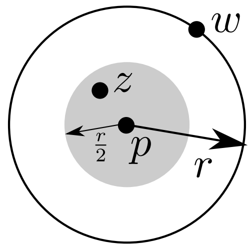


Fig 63

Step 3: Now

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{(w-z)^{-n}-(w-p)^{-n}}{z-p} - n(w-p)^{-(n+1)} \\
&= \frac{(w-p)^n-(w-z)^n}{(z-p)(w-z)^n(w-p)^n} - \frac{n}{(w-p)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

এবার (*)-কে কাজে লাগিয়ে ওই $(w-p)^n-(w-z)^n$-টাকে নিংড়ে
একটা $(w-p)-(w-z)=z-p$ বার করব।
সেটা নীচের তলার $(z-p)$-টার সঙ্গে কাটাকাটি হয়ে যাবে।

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(w-p)^k(w-z)^{n-1-k}}{(w-z)^n(w-p)^n} - \frac{n}{(w-p)^{n+1}} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(w-p)^{k+1}(w-z)^{n-1-k} - n(w-z)^n}{(w-z)^n(w-p)^{n+1}} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\{(w-p)^{k+1}(w-z)^{n-1-k} - (w-z)^n\}}{(w-z)^n(w-p)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

এখানে আমরা $n(w-z)^n$-কে $\sum_{k=0}^{n-1}$-এর মধ্যে ঢুকিয়ে নিয়েছি।
তাই $n(w-z)^n$-টা ভেঙে n-খানা $(w-z)^n$ হয়ে গেছে।

$$
= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\{(w-z)^{n-1-k}[(w-p)^{k+1}-(w-z)^{k+1}]\}}{(w-z)^n(w-p)^{n+1}}
$$

আবার (*)-কে কাজে লাগিয়ে ওই $(w-p)^{k+1}-(w-z)^{k+1}$-টাকে নিংড়ে
একটা $(w-p)-(w-z)=z-p$ বার করব।
সেটা একেবারে বাইরে বেরিয়ে আসবে।

$$
= (z-p)\times\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\{(w-z)^{n-1-k}[\sum_{\ell=0}^{k}(w-p)^{\ell}(w-z)^{k-\ell}]\}}{(w-z)^n(w-p)^{n+1}}.
$$

So

$$
\frac{A}{z-p} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\{(w-z)^{n-1-k}[\sum_{\ell=0}^{k}(w-p)^{\ell}(w-z)^{k-\ell}]\}}{(w-z)^n(w-p)^{n+1}}.
$$

এবার এটাকে bounded দেখাতে হবে। কাজটা খুব কঠিন মনে হলেও আসলে ততটা নয়।

Step 4: By triangle inequality,

$$\left|\frac{A}{z-p}\right| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\{|w-z|^{n-1-k}[\sum_{\ell=0}^{k}|w-p|^{\ell}|w-z|^{k-\ell}]\}}{|w-z|^{n}|w-p|^{n+1}}$$

এদিকে $w \in D = \text{circle}(p,r)$. তাই $|w-p| = r$ হতে বাধ্য।

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\{|w-z|^{n-1-k}[\sum_{\ell=0}^{k}r^{\ell}|w-z|^{k-\ell}]\}}{|w-z|^{n}r^{n+1}} \quad [\because w \in D]$$

এইবার একটা কৌশল করব। যদি $z \in N\left(p, \frac{r}{2}\right)$ নিই, তবে p, w আর z-এর অবস্থান Fig 63-এর মত। দেখতেই পাচ্ছ যে, w যাই হোক না কেন সব সময়েই $r \geq |w-z| > \frac{r}{2}$. সুতরাং উপরতলা bounded আর নীচের তলা 0-র থেকে দূরে আছে। অতএব পুরো জিনিসটা bounded হতে বাধ্য!

Now $\forall z \in N\left(p, \frac{r}{2}\right) \quad r \geq |w-z| > \frac{r}{2}$.

Hence

$$\exists B > 0 \quad \forall z \in N\left(p, \tfrac{r}{2}\right) \quad \left|\frac{A}{z-p}\right| \leq B.$$

So, by **(2)**,

$$\forall z \in N\left(p, \tfrac{r}{2}\right) \quad \left|\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_D f(w)A\,dw\right| \leq (n-1)!r(|f(p)|+1)B \times |z-p|.$$

এইটাকে ϵ নিলেই হবে। সেটাই করব এবার শেষ ধাপে, যেখানে সব কিছু মিলিয়ে উপসংহার টানব।

Step 5:

$\exists\delta$ Choose $\delta = \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{\epsilon}{(n-1)!r(|f(p)|+1)B}\right\} > 0$.

$\forall z$ Take any $z \in N(p,\delta)$.

Then

$$\left|\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_D f(w)A\,dw\right| < (n-1)!r(|f(p)|+1)B \times |z-p| = \epsilon.$$

Thus, by **(1)**,

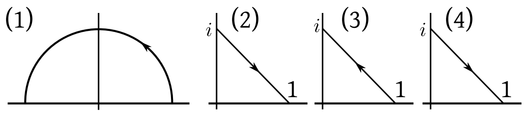
$$\left|\frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(p)}{z-p} - \frac{n!}{2\pi i}\int_D \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw\right| < \epsilon,$$

as required.

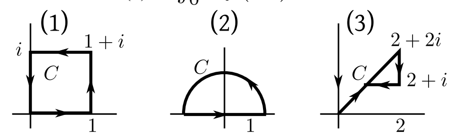
[Q.E.D]

Answers

1. $2i$. **2.**



3. (i) $i\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{it}dt$. (ii) $i\int_1^2 f\left(\frac{1}{it}\right)\frac{dt}{t^2}$. **4.** (i) 0. (ii) 0. (iii) $\frac{(1+i)^2}{2}$. **5.**



$\int_C (z-1)dz = 0$ $\int_C (z-1)dz = 0$ $\int_C (z-1)dz = -1$

6. (i) আগের মতই। (ii) $-\frac{(1+i)^3}{3}$. (iii) আগের মতই। (iv) আগের মতই। (v) $\frac{2(1+i)^3}{3}$.
8. (i) না। (ii) হ্যাঁ। (iii) হ্যাঁ। (iv) না। **9.** না, হ্যাঁ, হ্যাঁ। **10.** হ্যাঁ। **11.** $\int_{C_1} e^z dz = e^{-2} - e^2$. $\int_{C_2} e^z dz = i(e^i - e^{-2i})$. $\int_{C_1}\frac{dz}{z} = i\pi$. $\int_{C_2}\frac{dz}{z} = -i\pi$. **13.** $\frac{2\pi i}{3}(e + e^{\omega} + e^{\omega^2})$. **14.** এখানে $f(z) = e^z/(z(z-2))$ নিলে, C-এর উপরে এবং ভিতরে $f(z)$-টা differentiable হবে। উত্তর হল $-2e\pi i$.
15. $-4\pi i\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{i-3}\right)$. **16.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ আর $f\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. **17.** $i - \frac{1}{4}$. **18.** $f(i) = 0$. কারণ $e^{-|z|}$ হল bounded. তাই $f(z)$-ও bounded. সুতরাং Liouville's theorem অনুযায়ী constant হতে বাধ্য। এদিকে $e^{-|z|} \to 0$ যখন $z \to \infty$. তাই constant-টা 0 হতে বাধ্য। **18.** 0. কারণ $|z| \le 10$ হলে $|f(z)|$-টা continuous হওয়ায় এমনিতেই bounded. আর বলে দিয়েছে $|z| > 10$ হলেও bounded.

Chapter V
Power Series

DAY 27
গোড়ার কথা

Power series-এর ধারণাটার সঙ্গে হয়তো তোমার real analysis থেকেই একটা পরিচয় আছে। সেটা যদি মনে থেকে থাকে, তবে এই অধ্যায়ের অধিকাংশ জিনিসই খুব চেনা ঠেকবে। অবশ্য মনে না থাকলেও খুব একটা ক্ষতি নেই। আমরা গোড়া থেকেই শুরু করব। Polynomial কাকে বলে সেটা তো জানোই, এইরকম একটা function--

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n.$$

এখানে $n = 0, 1, 2, \ldots$ জাতীয় কোনো সংখ্যা। আমাদের এই বইতে a_i-গুলো সবাই একেকটা complex সংখ্যা। আর ওই z-টা হল যাকে বলে আমাদের variable. ওটার value যেকোনো complex সংখ্যা হতে পারে। Power series-ও একইরকম জিনিস, খালি ব্যাপারটা n-এই থেমে না থেকে চলতেই থাকে, চলতেই থাকে। যেমন--

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots . \qquad (\mathbf{1})$$

অনেক সময়ে আমরা এর চেয়ে আরেকটু general চেহারার power series নিয়ে কাজ করি--

$$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots . \qquad (\mathbf{2})$$

এখানে c একটা complex সংখ্যা, যাকে বলে power series-টার **centre**. লক্ষ করো যে, (**2**)-তে যদি $c = 0$ বসাই, বা $z - c$-কে w নাম দিই, তবে (**1**)-এর চেহারাটা ফিরে পাব।
পুরো সংজ্ঞাটা গুছিয়ে লিখে নেওয়া যাক--

> DEFINITION: **Power series**
>
> By a complex **power series** we mean an expression of the form
>
> $$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots ,$$
>
> where $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{C}$ and $c \in \mathbb{C}$. Here c is called the **centre** of the power series, and $a_0, a_1, a_2, \ldots$ are called the **coefficient**s of the power series. Also, z is a complex variable.

ব্যাপারটা খুব যে কঠিন দেখাচ্ছে এমন নয়, কিন্তু ওই শেষের ডট্ ডটের জায়গাটা একটু বোঝা দরকার।

ছাগল বলল, শক্ত আবার কোথায়? ওই শিশি বোতলের জায়গাটা একটু শক্ত ঠেকল। তাছাড়া তো শক্ত কিচ্ছু পেলাম না।
--হ য ব র ল

সত্যি সত্যি তো আর অসংখ্য জিনিস ধরে ধরে যোগ করা যায় না (তার জন্য অসীম আয়ু লাগবে)! আসলে ব্যাপারটা এইরকম-- প্রথমে একটা, দুটো, তিনটে এরকম করে term নিয়ে যোগ করা হয়--

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_1 &= a_0 + a_1(z-c), \\ S_2 &= a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2, \end{aligned}$$

এইরকম। এইভাবে তুমি একটা sequence পাবে $S_0, S_1, S_2, \ldots$. এই S_n-গুলোকে বলে power series-টার একেকটা **partial sum.** যদি দ্যাখো যে এই partial sum-দের sequence-টা কোনো $L \in \mathbb{C}$-তে converge করছে, তবে আমরা বলব z-এর ওই value-তে power series-টার value হল L. আর যদি দ্যাখো converge করছে না, তবে বলব যে z-এর ওই value-তে power series-টার কোনো value নেই।
Converge করা বলতে কী বোঝাচ্ছি, বুঝতে পারলে তো? এর মানে হল, n যতই বাড়বে ততই S_n-গুলো কোনো একটা complex সংখ্যার দিকে এগোবে, এবং ক্রমশঃ তার সঙ্গে একেবারে মিশে যাবে। অংকের ভাষায়--

DEFINITION: Convergence of a sequence

A sequence $\{S_n\}_n \subseteq \mathbb{C}$ is said to **converge** to some $L \in \mathbb{C}$ if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |S_n - L| < \epsilon.$$

Real analysis শেখার সময়ে যে convergence-এর সংজ্ঞা শিখেছিলে, এটা একেবারে সেটাই। Real সংখ্যাদের convergence আর complex সংখ্যাদের convergence-এর মধ্যে নিবিড় সম্পর্ক। সেটা নিয়েই নীচের theorem-টা।

THEOREM

Let $\{S_n\}_n$ be any sequence in $\mathbb{C}$, and let L be any complex number.

1. If $S_n \to L$, then $\mathrm{Re}(S_n) \to \mathrm{Re}(L)$ and $\mathrm{Im}(S_n) \to \mathrm{Im}(L)$.
2. Conversely, if $\mathrm{Re}(S_n) \to \mathrm{Re}(L)$ and $\mathrm{Im}(S_n) \to \mathrm{Im}(L)$, then $S_n \to L$.
3. If $S_n \to L$, then $|S_n| \to |L|$.
4. But if $|S_n| \to |L|$, even then S_n may not converge to L.
5. If $|S_n| \to 0$, then $S_n \to 0$.

Proof: এগুলো কোনোটাই প্রমাণ করা শক্ত নয়, সংজ্ঞা ব্যবহার করে দু এক লাইনের ব্যাপার। কিন্তু প্রমাণের চেয়েও বেশী দরকার হল ধারণাগুলো ছবি দিয়ে বোঝা। একটা complex সংখ্যা মানে তো একটা বিন্দু, সুতরাং এরকম বিন্দুদের একটা sequence (ধরো (x_n, y_n)) যদি কোনো একটা নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে এগোয় (ধরো (a, b)), তবে $x_n \to a$ আর $y_n \to b$ না হয়ে যায় কোথায়। অংকের ভাষায়--

> We know that for all $z \in \mathbb{C}$ we have $0 \leq |\text{Re}(z)| \leq |z|$ and $0 \leq |\text{Im}(z)| \leq |z|$.
> So $0 \leq |\text{Re}(S_n - L)| \leq |S_n - z|$ and $0 \leq |\text{Im}(S_n - L)| \leq |S_n - L|$.
> When $S_n \to L$, then $|S_n - L| \to 0$.
> So, by sandwich law, $|\text{Re}(S_n - L)| = |\text{Re}(S_n) - \text{Re}(L)| \to 0$, ie, $\text{Re}(S_n) \to \text{Re}(L)$.
> Similarly, $\text{Im}(S_n) \to \text{Im}(L)$.

একইভাবে $x_n \to a$ আর $y_n \to b$ হলে $(x_n, y_n) \to (a, b)$ হতে বাধ্য! অংকের ভাষায়--

> We know that for all $z \in \mathbb{C}$ we have $|z|^2 = \big(\text{Re}(z)\big)^2 + \big(\text{Im}(z)\big)^2$.
> Now if $\text{Re}(S_n) \to \text{Re}(L)$ and $\text{Im}(S_n) \to \text{Im}(L)$,
> then $\text{Re}(S_n - L) \to 0$ and $\text{Im}(S_n - L) \to 0$.
> So $|S_n - L|^2 \to 0$, and hence $|S_n - L| \to 0$.

একইভাবে (x_n, y_n) যদি (a, b)-র খুব কাছে চলে যায়, তবে $(0, 0)$ থেকে (x_n, y_n)-এর দূরত্ব আর $(0, 0)$ থেকে (a, b)-র দূরত্ব যে খুব কাছাকাছি হবে, সে তো বলাই বাহুল্য। অংকের ভাষায়--

> $0 \leq \big|\, |S_n| - |L| \,\big| \leq |S_n - L|$ by triangle inequality.
> So, if $S_n \to L$, then by sandwich law, $|S_n| \to |L|$.

কিন্তু এর উল্টোটা ঠিক নয়, কারণ একই modulus-ওয়ালা অনেক complex সংখ্যা সম্ভব, যেমন i আর $-i$-এর modulus সমান। এমন হতেই পারে যে S_n-গুলো i-তে converge করছে, আর তুমি হয়তো ভুল করে $L = -i$ নিয়ে বসে আছো।

> If we take $S_n \equiv i$, and $L = -i$, then $|S_n| \to |L|$. But $S_n \not\to L$.

কিন্তু 0-র বেলায় এমন সমস্যা হবে না, কারণ খালি একটাই এমন complex সংখ্যা আছে, যার modulus হল 0.

> If $|S_n| \to 0$ then $|S_n - 0| \to 0$. So $S_n \to 0$.

[Q.E.D]

Example 1: Show that $\{z^n\}_n$ converges only when $|z| < 1$ or when $z = 1$.

SOLUTION: যদি $z = 1$ হয়, তবে সব n-এর জন্যই $z^n = 1$. সুতরাং 1-এই converge করছে।
যদি $|z| < 1$ হয়, তবে $|z^n| = |z|^n \to 0$ হবে। সুতরাং $z^n \to 0$ হবে।
যদি $|z| > 1$ হয়, তবে converge করবে না, কারণ যদি করত (ধরো যদি $z^n \to L \in \mathbb{C}$ হত), তবে $|z^n| \to |L|$ হত। কিন্তু $|z^n| = |z|^n \to \infty$.
যদি $|z| = 1$ কিন্তু $z \neq 1$ হয়, তবে দেখাব যে z^n কোনোভাবেই converge করতে পারে না। এর জন্য proof by contradiction লাগাব। ধরো $z^n \to L$ হল। তবে $|z^n| \to |L|$ হবে। এদিকে $|z^n| = |z|^n = 1^n = 1$. তাই $|L| = 1$ হতে বাধ্য। এবার একটা কৌশল করব। প্রথমে $\delta = |z - 1| > 0$ নাও। লক্ষ করো, তুমি যাই $n \in \mathbb{N}$ নাও না কেন $|z^{n+1} - z^n| = |z^n| \times |z - 1| = \delta$. তার মানে sequence যেকোনো দুটো পর পর term-এর মধ্যে দূরত্ব একই থাকছে। কিন্তু সেটা কী করে হয়? আমরা তো ধরেছি $z^n \to L$ তাই $z^{n+1} \to L$ হতেও বাধ্য। সুতরাং $z^{n+1} - z^n \to L - L = 0$. অতএব $|z^{n+1} - z^n|$ মোটেই সব সময়ে $\delta > 0$ থাকতে পারে না, অবশ্যই 0-র দিকে যেতে বাধ্য! ■

Example 2: বলো তো $1+z+z^2+\cdots$ এই power series-টা z-এর কোন্ কোন্ value-র জন্য converge করে।

SOLUTION: যদি $z=1$ হয়, তবে যে converge করে না, সে তো দেখাই যাচ্ছে। যদি $z \neq 1$ নিই, তবে n-th partial sum-টা হল

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}.$$

এটা converge করবে যদি z^n-টা converge করে। আগের অংকটা বলছে যে, সেটা হবে ঠিক যখন $|z|<1$ হয় ($z=1$ কেসটা তো এখানে আগেই বাদ গেছে)। সেক্ষেত্রে $z^n \to 0$, সুতরাং power series-টা হবে $\frac{1}{1-z}$. যদি $|z|>1$ হয়, তবে converge করবে না। বস্তুতঃ $|z|=1$ হলেও converge করবে না। ■

Power series-এর নানারকম বৈশিষ্ট্য আজকে আমরা সেগুলোকে সহজ ভাষায় আলোচনা করব। প্রমাণগুলো মুলতুবি রাখব আগামী দিনগুলোর জন্য।

- প্রথমেই লক্ষ করো যে, একটা power series তৈরী করার জন্য দরকার খালি দুই রকমের উপাদান, একটা centre আর coefficient-দের একটা sequence. যে কোনো একটা complex সংখ্যা c-কেই centre নেওয়া যায়, এবং যে কোনো $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$-কেই coefficient নেওয়া চলে।

- এরকম যে কোনো একটা power series দেওয়া থাকলে সেটা z-এর কোন্ কোন্ value-র জন্য converge করে, সেটা চট্ করে বোঝার একটা কায়দা আছে। তার নাম **radius of convergence**. যে কোনো power series-এরই একটা radius of convergence থাকে, সেটা সাধারণতঃ একটা real সংখ্যা হয়, যেটা ≥ 0, আর নয় তো radius of convergence হয় ∞. ধরো একটা power series দেওয়া আছে যার radius of convergence হল R, আর centre হল c. তবে কি হবে সেটা Fig 1-এ দেখিয়েছি। বিশদভাবে বললে--

  - যদি $R=0$ হয়, তবে power series-টা কেবলমাত্র $z=c$ হলেই converge করবে, $z \neq c$ হলে করবে না।
  - যদি $R \in (0,\infty)$ হয়, তবে power series-টা $|z-c|<R$ হলে converge করবে, এবং $|z-c|>R$ হলে converge করবে না। লক্ষ করো $|z-c|=R$ কেসটা বাদ রয়ে গেল। এইক্ষেত্রে কী হবে, সেটা কেবলমাত্র radius of convergence ব্যবহার করে বোঝা যাবে না।
  - যদি $R=\infty$ হয়, তবে power series-টা z-এর যে কোনো value-র জন্যই converge করবে।

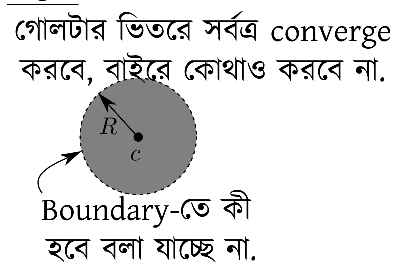
Power series-দের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের তালিকাটা কিছুক্ষণের জন্য স্থগিত রেখে এখানে চট্ করে কয়েকটা অংক কষে radius of convergence জিনিসটার সাথে পরিচিত হয়ে নেওয়া যাক।

Example 3: একটা power series আছে

$$a_0+a_1(z+i)+a_2(z+i)^2+\cdots.$$

বলা আছে যে, এর radius of convergence হল 3. বলতে হবে $z=2,3$ আর $2i$-তে এটা converge করে কি না।

Fig 1



SOLUTION: এখানে centre হল $-i$. তাই আমাদের পরীক্ষা করে দেখতে হবে $|z-(-i)| = |z+i|$-টা 3-এর চেয়ে কম নাকি বেশী।
$z=2$ হলে $|z+i| = |2+i| = \sqrt{5} < 3$. সুতরাং converge করবে।
$z=3$ হলে $|z+i| = |3+i| = \sqrt{10} > 3$. সুতরাং converge করবে না।
$z=2i$ হলে $|z+i| = |2i+i| = 3$. এক্ষেত্রে $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ইত্যাদি না জানলে উত্তর দেওয়া যাবে না। ■

Exercise 1: একটা power series-এর radius of convergence জানা আছে 1. যদি তার centre হয় $3+2i$, তবে $z = 2+3i$-তে কী সেটা converge করবে? ■

এবার একটা ছোট্টো ঠকানো প্রশ্ন--

Exercise 2: এমন একটা power series বার করো

$$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots,$$

যেটা $z=c$ হলে converge করে না। ■

আবার power series-দের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের তালিকাটা ফের শুরু করা যাক।

- ধরো একটা power series দেওয়া আছে, মানে তার centre আর coefficient-গুলো দেওয়া আছে। তা থেকে কী করে radius of convergence বার করা যাবে? প্রথমেই বলে রাখি যে, radius of convergence বার করার জন্য centre জানার কোনো প্রয়োজন নেই, খালি coefficient-গুলো জানাই যথেষ্ট। ধরো coefficient-গুলো হল $a_0, a_1, a_2, \ldots$. তবে প্রথমে $\limsup_n |a_n|^{1/n}$ বার করতে হয়, ধরো এর নাম দিলাম ℓ. এবার তিনটে কেস হয়--
  - যদি $\ell = 0$ হয়, তবে radius of convergence হবে ∞.
  - যদি $\ell = \infty$ হয়, তবে radius of convergence হবে 0.
  - যদি $\ell \in (0, \infty)$ হয়, তবে radius of convergence হবে $\frac{1}{\ell}$.

  এখানে ওই খটোমটো $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$-টা দেখে তোমার কান্না পেয়ে যেতে পারে (নাকি $\limsup$ কাকে বলে, সেটাই ভুলে মেরে দিয়েছো?)। যাই হোক, তা নিয়ে এখনই দুশ্চিন্তা কোরো না। $\limsup$ কী জিনিস, কী করে বার করে, ইত্যাদি সব একটু পরেই বলব। আপাততঃ এইটুকু জেনে খুশি থাকো যে, coefficient-গুলো জানলেই radius of convergence বার করা যায়।

এবার ধরো একটা power series দেওয়া আছে, যার centre হল c আর radius of convergence হল $R > 0$. (মানে, হয় R একটা real সংখ্যা যেটা > 0, অথবা $R = \infty$)। তাহলে আমরা জানি যে $|z-c| < R$ হলেই power series-টা converge করবে। যদি $R = \infty$ হয়, তবে যে কোনো $z \in \mathbb{C}$-এর জন্যই $|z-c| < R$ হবে, অর্থাৎ power series-টা সর্বত্রই converge করবে। এই set-টাকে আমরা $N(c, R)$ নাম দেব, অর্থাৎ--

$$N(c,R) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-c| < R\}.$$

তাহলে power series-টা একটা function দেবে $f(z)$, যেটা $N(c,R)$-এর উপরে defined. এই function-টার নানা ভালো ভালো গুণ আছে--

- প্রথম গুণ হল তুমি এটাকে যতবার খুশি differentiate করতে পারো। এবং সেই কাজটা term by term করা যাবে, মানে--

$$\begin{aligned} f'(z) &= a_1 + 2a_2(z-c) + 3a_3(z-c)^2 + \cdots, \\ f''(z) &= 2a_2 + 6a_3(z-c) + 12a_4(z-c)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

এইরকম। লক্ষ করো এখানে $f'(z), f''(z)$ ইত্যাদিরাও এককেটা power series-এর আকারে রয়েছে। এদের সকলেরই radius of convergence হবে ওই একই R.

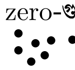
- এই $f(z)$-কে তুমি $N(c,R)$-এর মধ্যে যে কোনো contour-এর উপরে integrate করতে পারো, এবং সেটাও term by term করা যাবে, অর্থাৎ যদি C হয় $N(c,R)$-এর মধ্যে যে কোনো contour, তবে

$$\int_C f(z)dz = a_0 \int_C dz + a_1 \int_C (z-c)dz + a_2 \int_C (z-c)^2 dz + \cdots .$$

- ধরো তোমাকে দুটো এমন power series দিলাম, যাদের centre একই--

$$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots$$
$$b_0 + b_1(z-c) + b_2(z-c)^2 + \cdots$$

  যদি কোনো $r > 0$-র জন্য দ্যাখো যে, সব $z \in N(c,r)$-এর জন্যই দুজনেই converge করে এবং সমান value দেয়, তবে জানবে যে ওরা আসলে একই power series, মানে $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$ ইত্যাদি হতে বাধ্য।

- এবার power series-এর একটা অদ্ভুত ধর্মের কথা বলব। ধরো $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z-c)^n$ যেখানে $z \in N(c,R)$. ধরো $f(z)$ একেবারে identically zero না হয় (মানে সর্বত্রই শূন্য না হয়)। যদি $z_0 \in N(c,R)$ এমন হয় যে $f(z_0) = 0$ তবে z_0-কে বলব f-এর একটা **zero**. এই zero-গুলোর একটা ধর্ম হল এরা সবসময়ে খানিকটা ফাঁক ফাঁক থাকবে, কোথাও ভীড় করবে না, মানে এইরকম হবে, , কিন্তু মোটেই এইরকম খুব ঘন ঘন গায় গায় লেগে থাকবে না। অংকের ভাষায় বললে এমন একটা $\epsilon > 0$ পাবে যাতে $N(z_0, \epsilon)$-এর মধ্যে z_0 ছাড়া অন্য যেকোনো z-এর জন্যই $f(z) \neq 0$.

এই অব্ধি যা যা বললাম, সে সবই মোটামুটি real analysis-এর মতই। এবার একটা জিনিস বলব যেটা complex analysis-এর নিজস্ব জিনিস, এবং যার জন্য power series-এর ধারণাটা complex analysis-এ এত গুরুত্বপূর্ণ--

- ধরো $c \in \mathbb{C}$ যেকোনো একটা complex সংখ্যা আর $R > 0$ কোনো একটা real সংখ্যা বা ∞. এবার ধরো $f(z)$ এমন একটা function, যেটা $N(c,R)$-এর উপরে[1] সর্বত্র differentiable. তাহলে $f(z)$-কে $N(c,R)$-এর উপরে যতবার খুশি differentiate করা যাবে এবং একটা power series আকারে লেখা যাবে, যার radius of convergence অন্ততঃ R. অর্থাৎ এমন $a_0, a_1, a_2, ...$ পাওয়া যাবেই যাতে $f(z)$-কে এইভাবে লেখা যাবে

$$f(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots, \quad (z \in N(c,R)).$$

  শুধু তাই নয়, এই a_i-গুলোকে হাতেকলমে বারও করে ফেলা যাবে, এই ফর্মুলা দিয়ে--

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

এই প্রসঙ্গে একটা নতুন ভাষা শিখে নাও, **analytic.**

Example 4: Define analytic function.[1] **(2009.12d)**

SOLUTION:

[1] মনে রেখো, $R = \infty$ হলে $N(c,R)$ মানে পুরো $\mathbb{C}$.

DEFINITION: Analytic

A complex function $f(z)$ is called **analytic** at some point $c \in \mathbb{C}$ if there is some $r > 0$ and a sequence $a_0, a_1, a_2, ... \in \mathbb{C}$ such that for all $z \in N(c, r)$

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \cdots$$

■

আমরা power series-এর যে সব ধর্ম আলোচনা করলাম তা থেকেই বুঝতে পারছ যে, কোনো $f(z)$ যদি c-তে holomorphic হয়, তবে সেখানে analytic হতে বাধ্য, এবং এর উল্টোদিকটাও সত্যি, মানে কোথাও analytic হলে holomorphic হতেও বাধ্য। অর্থাৎ দুটো সংজ্ঞা দেখতে আলাদা হলেও, holomorphic আর analytic শব্দদুটো আসলে সমার্থক।

DAY 28
হাতেকলমে

গতকাল power series-দের অনেক রকম ধর্ম শিখেছি। কাল থেকে সেগুলো প্রমাণ করা শুরু করব। আজকে আপাততঃ সেগুলো হাতেকলমে প্রয়োগ করে নানা অংক করব।

28.1 Radius of convergence বার করা

প্রথমে আমরা radius of convergence বার করা শিখব। অর্থাৎ আমাদেরকে একটা power series দেওয়া থাকবে--

$$a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \cdots$$

তা থেকে আমরা তার radius of convergence-টা বার করব। অনেক সময়ে power series-টাকে চোখে দেখেই radius of convergence-টা বলে দেওয়া যায়। যেমন নীচের অংকটায়। এই অংকটা আমরা গতকালই দেখেছি।

Example 5: $1 + z + z^2 + \cdots$, এই power series-টার radius of convergence বার করো।

SOLUTION: আমরা আগেই দেখেছি যে এই power series-টা $|z| < 1$ হলে converge করে, আর $|z| > 1$ হলে করে না[2]। সুতরাং radius of convergence হল 1. ■

এখানে আমরা চোখে দেখে সামান্য পরীক্ষা করেই radius of convergence বার করে ফেলতে পারলাম। সেটা যদি নাও পারতাম, তাও আমাদের হাতে একটা অমোঘ অস্ত্র আছেই, যেটার উল্লেখ গতকালই করেছি--

> প্রথমে $\ell = \limsup_n |a_n|^{1/n}$ বার করতে হয়। তাহলে $R = \frac{1}{\ell}$ হবে radius of convergence. অবশ্য $\ell = 0$ বা ∞ হলে $\frac{1}{\ell}$ বার করা যাবে না। সেক্ষেত্রে কায়দাটা হল, $\ell = 0$ হলে $R = \infty$, আর $\ell = \infty$ হলে $R = 0$.

এইখানে হয়তো $\limsup$ কী জিনিস সেটা মনে করিয়ে দিলে একটু সুবিধা হবে।

[2] আরও দেখেছিলাম যে $|z| = 1$ হলেও converge করে না, যদিও radius of convergence বার করতে সে তথ্যটা কাজ লাগবে না।

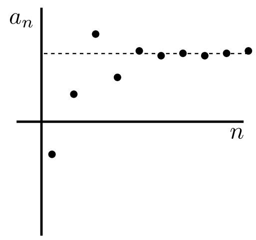


Fig 2

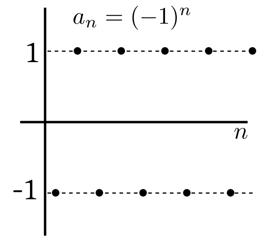


Fig 3

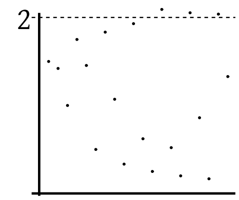


Fig 4

28.1.1 lim sup কী জিনিস?

প্রথমেই বলে রাখি যে, lim sup কিন্তু পুরোপুরি real analysis-এর জিনিস। এর মধ্যে কোনো complex সংখ্যার গল্প নেই। আমরা এখানে $\limsup |a_n|^{1/n}$ বার করছি। ওই a_n-কে ঘিরে modulus চিহ্নটা থাকায় $|a_n|^{1/n}$ কিন্তু আসলে real সংখ্যা। সুতরাং real analysis শেখার সময়ে যে lim sup-এর কথা শিখেছিলে সেটা যদি মনে থাকে, তবে আর নতুন কিছু শেখার নেই। যদি সেটা ভুলে গিয়ে থাকো, তবে সংক্ষেপে দরকারী জিনিসটুকু মনে করিয়ে দিই।

একটা real সংখ্যার sequence পেলেই সেটাকে Fig 2-এর মত গ্রাফ দিয়ে ভাবার চেষ্টা করবে। ছবিতে যে sequence-টা দেখিয়েছি সেটা যে convergent বুঝতে পারছ তো? সবগুলো বিন্দু বেশ এক সার পিঁপড়ের মত একটা নির্দিষ্ট সংখ্যার কাছে চলেছে। অনেক sequence-এর বেলায় এরকম একাধিক পিঁপড়ের সারি দেখতে পাওয়া যায়। যেমন $a_n = (-1)^n$ হলে ছবিটা হবে Fig 3-র মত, যেখানে দুটো সারি আছে, উপরের সারির পিঁপড়েগুলো 1-এ converge করছে, নীচের সারিটা -1-এ। অংকের ভাষায় অবশ্য পিঁপড়ের সারিদের একটা ভদ্র নাম আছে, **convergent subsequence**.

ওটা কী পাখি ডাকছে?
শুনেছি ওকে বলে ঘুঘু
তাদের ভাষায় ওকে একটা ভদ্র নাম দাও, বলো বিন্তি।
--তাসের দেশে

যে convergent subsequence-টা সবচেয়ে উপরে converge করছে, তার limit-টাকেই বলে পুরো sequence-টার lim sup. যেমন Fig 3-এ দেখানো $\{(-1)^n\}_n$ -এর বেলায় lim sup হল 1. আরেকটা জটিলতর উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 4-এ। এখানে lim sup-টা হল 2. অবশ্য যদি কোনো sequence একেবারে unbounded above হয় (মানে অন্ততঃ একটাও subsequence থাকে যেটা সটান ∞-র দিকে ছুটেছে), তবে lim sup-টাকে বাধ্য হয়েই ∞ নিতে হয়। ব্যস্, এই হল lim sup-এর গল্প। এইটুকু জানলেই আমাদের কাজ চলবে। আর হ্যাঁ, যে কোনো sequence-এরই কিন্তু lim sup থাকে। এইখানেই limit-এর চেয়ে lim sup-এর বাহাদুরি। এমন sequence আছে যাদের কোনো limit-ই থাকে না। কিন্তু যত বেয়াড়া sequence-ই হোক, lim sup ঠিক থাকবেই! Fig 4-এর sequence-টাই এরকম একটা উদাহরণ। অবশ্য limit যদি থাকে, তবে lim sup-ও সেটাই হবে, কারণ সবগুলো পিঁপড়েই যদি একই সারিতে থাকে, তবে সেই একমাত্র সারিটাই সবচেয়ে উপরের সারিও বটে। (ক্লাসে যদি খালি একটাই ছাত্র থাকে, তবে সে ফেল করলেও ফার্স্ট বয়!)।

এই কথাটা মাথায় রেখে ফের power series-এর radius of convergence বার করার প্রসঙ্গে ফেরা যাক।

28.1.2 আবার power series

Example 6: এবার lim sup-এর কায়দায় আগের অংকটাকে ঘায়েল করো তো!

SOLUTION: সেই অংকে power series-টা ছিল $1 + z + z^2 + \cdots$, তার মানে a_n-রা সকলেই 1, তাই $|a_n|^{1/n}$-রাও 1. অতএব তার lim sup-ও সেই 1. সুতরাং radius of convergence হবে $1/1 = 1$. ■

Example 7: এই power series-টার radius of convergence বার করো--

$$2^{0^2} + 2^{1^2}(z-i) + 2^{2^2}(z-i)^2 + 2^{3^2}(z-i)^3 + \cdots .$$

SOLUTION: এখানে $a_n = 2^{n^2}$. সুতরাং $|a_n|^{1/n} = \left|2^{n^2}\right|^{1/n} = 2^n \to \infty$. অতএব এখানে radius of convergence হল 0. এখানে centre-টা i. তাই radius of convergence-টা 0 হওয়া মানে এই power series-টা খালি $z = i$ হলেই

converge করে, অন্য কোত্থাও converge করে না। ■

Exercise 3: এই power series-টা দ্যাখো--

$$10 + z + 2^2z^2 + 3^3z^3 + 4^4z^4 + \cdots .$$

আগের অংকটার অনুকরণে এটার radius of convergence বার করো তো!
HINT: এখানে $a_n = n^n$ হচ্ছে, খালি $n = 0$-র বেলায় এ ফর্মুলাটা খাটছে না। কিন্তু limsup বার করার জন্য গোড়ার দিকে কিছু term এলোমেলো হয়ে গেলেও কিছু বদলায় না। ■

Exercise 4: এই power series-টার radius of convergence বার করো--

$$z - 2^{-2}z^2 + 3^{-3}z^3 - + \cdots$$

HINT: চিহ্ন বদলানো নিয়ে চিন্তা কোরো না। তুমি তো কাজ করবে a_n-দের modulus নিয়ে। ■

লক্ষ করো এতক্ষণ যা যা উদাহরণ দেখলাম, সেখানে কোথাওই $\limsup$ নিয়ে কাজ করতে হয় নি, খালি $\lim$ দিয়েই কাজ চলে যাচ্ছিল। এবার একটা উদাহরণ দেখব, যেখানে $\lim$ দিয়ে কাজ হবে না, $\limsup$ লাগবে।

Example 8: এই power series-টার radius of convergence বার করব এবার--

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots$$

এটা দেখেই নিশ্চয়ই একটা GP series বলে চিনে ফেলেছ। আসলে এখানে $w = z^2$ বসালেই আমাদের পরিচিত

$$1 + w + w^2 + w^3 + \cdots$$

হয়ে যায়, যেটা $|w| < 1$ হলে converge করে, $|w| > 1$ হলে করে না। সুতরাং $|z^2| < 1$ হলে converge করে, $|z^2| > 1$ হলে করে না। আমরা জানি $|z^2| = |z|^2$, তাই radius of convergence হবে 1. এটা বোঝাই যাচ্ছে, কিন্তু আমি চাই যে, তুমি ওই $\limsup$-ওয়ালা ফর্মুলাটা ব্যবহার করে এই একই উত্তর পাও।
SOLUTION: এখানে $a_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ odd} \\ 1 & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$.
সুতরাং $|a_n|^{1/n} = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ odd} \\ 1 & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$ ।
লক্ষ করো এখানে sequence-টা 0 আর 1-এর মধ্যে ক্রমাগত লাফালাফি করেই চলেছে। তাই $\lim a_n$ মোটেই exist করে না, কিন্তু $\limsup a_n$ অবশ্যই exist করে, এবং $\limsup a_n = 1$. তাই radius of convergence হচ্ছে $\frac{1}{1} = 1$, ঠিক যেমনটা দরকার ছিল। ■

28.1.3 $\limsup$ ব্যবহার না করে

একটা কথা বলতেই হয়, ওই $\limsup |a_n|^{1/n}$ জিনিসটা বার করা সবসময়ে সহজ নাও হতে পারে। এবার একটা সহজ কায়দা শিখব, যেটা দিয়েও একটা power series-এর radius of convergence বার করার চেষ্টা করা যায়। সমস্যা হল এই সহজ কায়দাটা সবসময়ে কাজ করে না। কিন্তু যদি করে, তবে অনেকটা পরিশ্রমই বেঁচে যায়। কায়দাটা এইরকম--
ধরো power series-টা হল $a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots$. তোমাকে দেখতে হবে এই limit-টা কত হয়--

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

যদি এটা exist করে (∞ হলেও আপত্তি নেই), তবে সেটাই হবে radius of convergence. কিন্তু যদি exist না করে, তবে কিছুই বলা যাবে না (মানে তখন সেই $\limsup |a_n|^{1/n}$ নিয়ে কাজ করা ছাড়া পথ নেই)।
একটা অংক দেখি যেখানে এই কায়দাটা কাজে দেবে।

Example 9: এই power series-টার radius of convergence বার করো--

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots .$$

SOLUTION: এখানে $a_n = \frac{1}{n!}$. সুতরাং

$$|a_n|^{1/n} = (n!)^{-1/n} = \exp\left(-\tfrac{1}{n}\log n!\right).$$

এর $\limsup$ বার করাটা খুব উপাদেয় কাজ মনে হচ্ছে না। দেখি আমাদের নতুন কায়দাটা লাগানো যায় কি না।

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

ব্যস্‌, পেয়ে গেলাম যে, radius of convergence হবে ∞. মানে এই power series-টা যেকোনো $z \in \mathbb{C}$-তেই converge করে। এবং সেটাই স্বাভাবিক, কারণ এটাই তো আমাদের পরিচিত e^z-এর power series. ■

28.2 Power series বানানো

Real analysis শেখার সময়ে (বা হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই) আমরা কয়েকটা power series-এর কথা শিখি। তার মধ্যে উল্লেখযোগ্য হল $e^x, \log(1+x), \sin x, \cos x$ ইত্যাদি। এর বাইরে অন্য কিছু দিলে তাদের জন্য power series বার করার পথ ছিল প্রথমে Taylor series-টা বার করা, এবং তারপর পরীক্ষা করে দেখা সেটা converge করে কিনা[3]। এই কাজে দুটো সমস্যা ছিল--

- এক, Taylor series বার করার জন্য সব $n = 0, 1, 2, \ldots$-এর জন্যই $f^{(n)}(c)$ বার করতে হয়। এমন হতেই পারে যে, n-এর কোনো একটা value-তে গিয়ে আবিষ্কার করলে যে, f-কে n-বার differentiate করাই যাচ্ছে না। তাহলে Taylor series-টা লেখাই যাবে না।

- দুই, যদি Taylor series-টা লেখা যায়ও, তাও সেটা converge করে কিনা দেখানো বেজায় ঝকমারি। তার জন্য Lagrange's form of remainder বা Cauchy's form of remainder এইসব খটোমটো জিনিস নিয়ে অনেক কুস্তি করতে হয়, এবং তারপরেও কোনো গ্যারান্টি থাকে না যে converge করবেই।

Complex analysis-এর বেলায় এসব কোনো ঝকমারিই নেই। খালি দেখে নাও c-বিন্দুকে ঘিরে খানিকটা neighbourhood-এর সর্বত্র f-কে অন্ততঃ একবার differentiate করা যায় কিনা। ব্যস্‌, তাহলেই নিশ্চিন্ত যে, যতবার খুশি differentiate করা যাবে। অতএব Taylor series-টা লিখে ফেলার পথে কোনো অন্তরায়ই নেই। আর converge করা নিয়ে তো কোনোই চিন্তা নেই, converge করতে বাধ্য, radius of convergence অবশ্যই > 0 হবে। একটা উদাহরণ দেখি।

Example 10: $f(z) = e^{\sin z}$-কে কি 0-কে কেন্দ্র করে একটা power series আকারে লেখা সম্ভব? যদি হয়, তবে তার প্রথম চারটে term লিখে ফ্যালো। এবং সেই power series-টার radius of convergence বার করো।

SOLUTION: প্রশ্নটা দেখতে কঠিন লাগতে পারে। কিন্তু এখানে খালি দেখতে হবে $f(z)$-টা কোথায় কোথায় differentiable. আমরা জানি যে, e^z সর্বত্র differentiable, আর $\sin z$-ও তাই। দুটো differentiable function-এর composition-ও differentiable-ই হয়। অতএব $f(z)$-ও সর্বত্রই differentiable. ব্যস্‌ অমনি প্রশ্নের প্রথম আর তৃতীয় অংশের উত্তর হয়ে গেল--

[3]আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজী-বই সিরিজের Real Analysis (Volume 2)-তে এ নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা আছে।

- যেহেতু 0-কে ঘিরে একটা neighbourhood-এ differentiable (আসলে সর্বত্রই differentiable), তাই অবশ্যই power series আকারে লেখা যাবে।
- আর সর্বত্রই differentiable বলে, radius of convergence হবে ∞.

অতএব converge-টনভার্জ করা নিয়ে কোনো দুশ্চিন্তাই নেই। ওসব আপনা থেকেই হয়ে গেল। এখানেই real analysis-এর চেয়ে complex analysis-এর সুবিধা। এবার তবে খালি প্রশ্নটার দ্বিতীয় অংশটা নিয়ে মাথা ঘামাতে হবে, মানে power series-টার term-গুলো বার করতে হবে। তার জন্য ফর্মুলা তো জানিই-- $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$, যেখানে

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

সুতরাং $f^{(0)}(0), ..., f^{(3)}(0)$ বার করতে পারলেই হল।

$$\begin{aligned} f^{(0)}(z) &= e^{\sin z} &\implies& \quad f^{(0)}(0) = 1 \\ f^{(1)}(z) &= e^{\sin z}\cos z &\implies& \quad f^{(1)}(0) = 1 \\ f^{(2)}(z) &= e^{\sin z}(\cos^2 z - \sin z) &\implies& \quad f^{(2)}(0) = 1 \\ f^{(3)}(z) &= e^{\sin z}(\cos^3 z - 3\cos z \sin z - \cos z) &\implies& \quad f^{(4)}(0) = 0 \end{aligned}$$

সুতরাং প্রথম চারটে term হল 1, z, $\frac{1}{2}z^2$ এবং 0. ■

Exercise 5: e^z-এর power series বার করো $z = i$-কে centre করে। ■

Exercise 6: আচ্ছা, z^3-কে $z = i$-কে centre করে power series আকারে লিখলে কী পাবে? ■

Exercise 7: $\sin z$ আর $\cos z$-এর power series বার করো 0-কে centre করে। ■

Exercise 8: আমরা শিখেছি $\frac{1}{1-z}$-কে power series আকারে লেখা যায় এইভাবে--

$$1 + z + z^2 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

এর centre হল 0 এবং radius of convergence হল 1. আচ্ছা, $\frac{1}{1-z}$-কে তুমি i-কে centre নিয়ে একটা power series আকারে লিখতে পারতে? তাহলে radius of convergence কত হত? ■

28.3 Differentiation

আমরা গতকাল power series-এর বিভিন্ন ধর্ম শেখার সময়ে একটা শিখেছিলাম term-by-term differentiation, মানে প্রতিটা term ধরে ধরে differentiate করলেই পুরো power series-টা differentiate করা হয়ে যায়--

$$\frac{d}{dz}(a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots) = a_1 + 2a_2(z-c) + 3a_3(z-c)^2 + \cdots.$$

এর ফলে যে নতুন power series-টা পাওয়া যায়, তার radius of convergence মূল power series-টার radius of convergence-এর সমান হয়। এটা ব্যবহার করে একটা অংক দেখা যাক।

Example 11: আমরা জানি

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

এটাকে আমরা যতবার খুশি differentiate করতে পারি। $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ আর $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z}\right)$-এর power series বার করো। দ্যাখো কোনো প্যাটার্ণ পাও কিনা। সেই প্যাটার্ণটা ব্যবহার করে $\frac{d^{200}}{dz^{200}}\left(\frac{1}{1-z}\right)$-র power series-টা লিখে ফ্যালো দেখি।

SOLUTION: একবার differentiate করে পাচ্ছি--

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

দুবার differentiate করলে--

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z}\right) = 2 \times 1 + 3 \times 2z + 4 \times 3z^2 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

এ থেকে একটা প্যাটার্ণ পাওয়া যাচ্ছে এইরকম--প্রতিবার differentiate করলে constant term-টা মারা পড়ছে, আর coefficient-গুলো আরো একঘর লম্বা হচ্ছে। সুতরাং 200 বার differentiate করলে constant term-টা হবে $200 \times 199 \times \cdots \times 1$, তারপর z-এর coefficient-টা হবে $201 \times 200 \times \cdots \times 2$. এইরকম লম্বা লম্বা গুণফলকে factorial দিয়ে লেখা যায়। যেমন constant term-টা হল $200!$, তারপর z-এর coefficient-টা হল $201!/2!$. সুতরাং 200 নম্বর derivative-টা হবে

$$200! + \frac{201!}{2!}z + \frac{202!}{3!}z^2 + \cdots.$$

■

Exercise 9: একটু আগেই $\sin z$ আর $\cos z$-এর power series বার করেছিলে। সেইটা ব্যবহার করে দ্যাখো তো $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$ আর $\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$ হচ্ছে কিনা। ■

28.4 Integration

Differentiation-এর মত integration-ও term-by-term করা যায়, মানে যদি এই power series দেওয়া থাকে

$$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots,$$

যার radius of convergence হল $R > 0$, এবং একটা contour দেওয়া থাকে C, যেটা পুরোটাই $N(c, R)$-এর মধ্যে আছে, তবে

$$\int_C (a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots)dz = a_0\int_C dz + a_1\int_C (z-c)dz + a_2\int_C (z-c)^2 dz + \cdots$$

হবে।

এটা ব্যবহার করে একটা অংক কষা যাক।

Example 12: $\int_C e^{-z^2}dz$ বার করো, যেখানে C হল Fig 5-এ দেখানো contour-টা।

SOLUTION: এই integral-টা সরাসরি বার করা দুঃসাধ্য। কিন্তু power series ব্যবহার করলে চট্ করে হবে। প্রথমে e^{-z^2}-কে একটা power series হিসেবে লিখব, 0-কে centre করে--

$$e^{-z^2} = 1 - z^2 + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + - + - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{n!}.$$

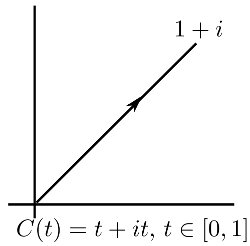


Fig 5

এর radius of convergence হল ∞. এবার contour integration করব term-by-term--

$$\int_C e^{-z^2} dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_C z^{2n} dz = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(1+i)^{2n+1}}{2n+1}.$$

এটাকে আর ভদ্র আকারে লেখা যায় না? উত্তর হল--না। কেন যায় না, তার প্রমাণ অবশ্য জটিল, এবং এই বইয়ের পাল্লার বাইরে। ■

DAY 29
প্রমাণ (part 1)

29.1 গোড়ার কথা

গতকাল যা যা শিখেছি, এবার আমরা সেগুলো প্রমাণ করার চেষ্টা করব। তার জন্য আমাদের convergence-এর ধারণাটা একটু ভালো করে বুঝতে হবে, এবং absolute convergence আর uniform convergence কাকে বলে সেটা জানতে হবে। Real analysis-এও absolute আর uniform convergence-এর ব্যাপার আছে। ধারণাগুলো এখানেও একেবারেই সেইরকমই। প্রমাণ-ট্রমাণও তাই। সেগুলো যদি মনে থেকে থাকে তো ভালোই। আমরা অবশ্য গোড়া থেকেই শুরু করব।

29.1.1 Root আর ratio test

শুরুতেই real analysis-এর থেকে দুটো জিনিস মনে করিয়ে দিই।

Root test

Let $\{a_n\}_n$ be a sequence of nonnegative real numbers. If $\limsup a_n^{1/n} < 1$, then $\sum a_n$ must converge.

Ratio test

Let $\{a_n\}_n$ be a sequence of nonnegative real numbers. If $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ exists and is < 1, then $\sum a_n$ must converge.

Real analysis পড়ার সময়ে এই theorem দুটোর একটু করে বাড়তি লেজুড় ছিল। যেমন root test-এর বেলায় বলা ছিল যে, $\limsup a_n^{1/n} > 1$ হলে $\sum a_n = \infty$ হবে, এবং $\limsup a_n^{1/n} = 1$ হলে $\sum a_n$-এর convergence নিয়ে কিছুই বলা যাবে না। একইরকম লেজুড় ছিল ratio test-এর বেলাতেও। এখানে সেই লেজুড়গুলো বাদ দিয়েছি, কারণ ওগুলো এখানে কাজে লাগবে না।

29.1.2 Cauchy sequence

Real analysis করার সময়ে **Cauchy sequence** খুব কাজে লাগে। একটু মনে করিয়ে দিই। ধরো $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ একটা sequence. এটাকে একটা Cauchy sequence বলব যদি এই শর্তটা পালিত হয়--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad |a_n - a_m| < \epsilon$$

সহজ ভাষায় বললে, যতটুকু ছোটো জায়গাই দাও না কেন, পুরো sequence-টাই তার মধ্যে এঁটে যাবে (খালি হয়তো গোড়ার দিকের finite সংখ্যক term বাইরে থেকে যেতে পারে)। ঠিক একই সংজ্ঞা খাটে complex সংখ্যাদের বেলাতেও--

DEFINITION: **Cauchy sequence**

A sequence $\{z_n\}_n \subseteq \mathbb{C}$ is called a **Cauchy sequence** if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad |z_n - z_m| < \epsilon.$$

আমরা জানি যে, একটা complex সংখ্যার মধ্যে দুটো real সংখ্যা লুকিয়ে থাকে, তার real আর imaginary অংশ। সুতরাং যদি $\{z_n\}_n$ একটা complex সংখ্যার sequence হয়, যেখানে $z_n = x_n + iy_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$, তবে তা থেকে দুটো real সংখ্যার sequence পাচ্ছি, $\{x_n\}_n$ আর $\{y_n\}_n$. স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে $\{z_n\}_n$-এর Cauchy sequence হওয়ার সঙ্গে ওই sequence দুটোর Cauchy sequence হওয়ার কোনো সম্পর্ক আছে কিনা। উত্তর হল--আলবৎ আছে, অত্যন্ত নিবিড় সম্পর্ক। যদি $\{z_n\}_n$-টা Cauchy হয়, তবে $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ দুজনেই Cauchy হবে, এবং বিপরীতপক্ষে যদি $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ দুজনেই Cauchy হয়, তবে $\{z_n\}_n$-ও Cauchy হতে বাধ্য! সেটাই নীচের theorem-টার বক্তব্য--

THEOREM

Let $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ be a sequence with $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ and $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Then $\{z_n\}_n$ is a Cauchy sequence $\iff$ both $\{x_n\}_n$ and $\{y_n\}_n$ are Cauchy sequences.

Proof: প্রমাণটা নিতান্তই সহজ। আমরা এই বইয়ে গোড়াতেই এই জিনিসটা উল্লেখ করেছিলাম যে, যেকোনো $z \in \mathbb{C}$-এর জন্যই $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ এবং $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ হয়। সুতরাং $|z| < \epsilon$ হলে $|\mathrm{Re}(z)|$ আর $|\mathrm{Im}(z)|$ দুজনেই $< \epsilon$ হবে। এই কথাটা দিয়েই প্রমাণের $\implies$ অংশটা হবে।

$\implies$ part : Shall show

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad |x_n - x_m| < \epsilon$ and $|y_n - y_m| < \epsilon$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

By the given condition, $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad |z_n - z_m| < \epsilon$.

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall n, m$ Take any $n > m \geq N$.

Then $|x_n - x_m| = |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z_m)| = |\mathrm{Re}(z_n - z_m)| \le |z_n - z_m| < \epsilon$.
Similarly, $|y_n - y_m| < \epsilon$, as required.

এবার অন্য দিকটা। আমরা জানি $|z|^2 = |\mathrm{Re}(z)|^2 + |\mathrm{Im}(z)|^2$ হয়। সুতরাং যদি $|\mathrm{Re}(z)|$ আর $|\mathrm{Im}(z)|$ দুজনেই $< \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ হয়, তবে $|z| < \epsilon$ হতে বাধ্য। এইটা দিয়ে প্রমাণ হবে $\Longleftarrow$ অংশটা।

$\Longleftarrow$ part: To show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \ge N \quad |z_n - z_m| < \epsilon$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

By the given condition,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \ge N_1 \quad |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \ge N_2 \quad |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}.$$

$\exists N$ Choose $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$.

$\forall n, m$ Take any $n > m \ge N$.

Then $|z_n - z_m|^2 = |x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2 < \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon$.
So $|z_n - z_m| < \epsilon$, as required.

[Q.E.D]

Cauchy sequence-রা গুরুত্বপূর্ণ কেন? তার কারণ হল নীচের theorem-টা, যেটাও বস্তুতঃ real analysis থেকেই আসে।

THEOREM

A sequence converges in $\mathbb{C}$ if and only if it is a Cauchy sequence.

Proof:

Let $z_n = x_n + iy_n$, where $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.
Then $\{z_n\}_n$ converges $\iff \{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ converge $\iff \{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ are Cauchy $\iff \{z_n\}_n$ is Cauchy.

[Q.E.D]

Convergent sequence আর Cauchy sequence যদি সমার্থকই হয়, তবে খামোখা নতুন করে Cauchy sequence নিয়ে মাথা ঘামাব কেন? কারণ যদি কোনো $\{a_n\}_n$-কে convergent দেখাতে হয়, তবে সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করার চাইতে Cauchy sequence ব্যবহার করার একটা বাড়তি সুবিধা আছে। সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করতে দেখাতে হবে--

$$\exists \ell \in \mathbb{C} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad |a_n - \ell| < \epsilon.$$

এখানে প্রথমেই আছে $\exists \ell \in \mathbb{C}$. তাই গোড়াতেই আমাদের আন্দাজ করতে হবে কোন্ $\ell \in \mathbb{C}$ নিলে কাজ হবে। অনেক সময়েই সেটা করা খুব কঠিন। অথচ $\{a_n\}_n$-কে Cauchy sequence দেখাতে হলে খালি দরকার--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

এর জন্য কোনো $\ell \in \mathbb{C}$ আন্দাজ করতে হচ্ছে না। এইখানেই Cauchy sequence-এর সুবিধা।
এবার Cauchy sequence ব্যবহার করে একটা দরকারী theorem প্রমাণ করব, যেটাও খুব অপরিচিত হবার কথা নয়।

29.1.3 একটা ছোট্টো theorem

THEOREM

If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is a convergent complex series, then $a_n \to 0$ as $n \to \infty$.

এটা কেন ঠিক তার প্রমাণ অতি সংক্ষেপেই হয়ে যাবে, কিন্তু আগে চিন্তা করে বুঝে নাও এটা কেন স্বাভাবিক। তুমি infinitely many সংখ্যা যোগ করেই চলেছ, অথচ যোগফলগুলো দিব্যি গুটিগুটি চরণে কোনো limit-এর দিকে এগোচ্ছে, তার মানে নিশ্চয়ই এই যে, সংখ্যাগুলোর তেজ ক্রমশঃই কমে আসছে। এবার প্রমাণটা দ্যাখো--

Proof:

Let $S_n = \sum_0^n a_k$ for $n = 0, 1, 2, ...$
Then $S_n \to \ell$ for some $\ell \in \mathbb{C}$.
Now $a_n = S_n - S_{n-1}$ for $n \geq 1$.
So $\lim_n a_n = \lim_n (S_n - S_{n-1}) = \lim_n S_n - \lim_n S_{n-1} = \ell - \ell = 0$, as required.

[Q.E.D]

29.1.4 Absolute convergence

Complex সংখ্যাদের নিয়ে কাজ করার চেয়ে real সংখ্যাদের নিয়ে কাজ করা সহজ। এবার একটা সংজ্ঞা শিখব, যেটা দিয়ে অনেক সময়ে একটা complex series-এর অংককে একটা real series-এর অংকে পরিণত করে ফেলা যায়।

DEFINITION: Absolute convergence

We say that a complex infinite series $\sum z_n$ converges absolutely if the real infinite series $\sum_0^{\infty} |z_n|$ converges.

লক্ষ করো, $|z_n|$-রা সবাই real সংখ্যা, এবং ≥ 0-ও বটে। এই সংজ্ঞাটা যে কাজের জিনিস, তার কারণ নীচের theorem-টা, যেটা বলে যে, $\sum |z_n|$ যদি converge করে, তবে $\sum z_n$-ও করবে, মানে একটা real series নিয়ে কাজ করেই একটা complex series-এর অংক করা হয়ে গেল!

THEOREM

If $\sum z_n$ converges absolutely, then $\sum z_n$ must converge.

Proof:

Let $S_n = \sum_0^n z_k$, and $T_n = \sum_0^n |z_k|$.

বলা আছে T_n-রা converge করে। দেখাতে হবে S_n-রাও converge করবে। কোথায় converge করবে তা জানা নেই, তাই convergence-এর সংজ্ঞা ব্যবহার করতে পারব না। তার চেয়ে বরং Cauchy sequence দেখাই, কারণ Cauchy sequence-রা সবাই converge করতে বাধ্য।

Shall show that $\{S_n\}_n$ is a Cauchy sequence, ie,

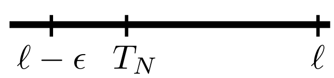
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad |S_n - S_m| < \epsilon.$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

T_n-রা converge করে বলেছে। ধরো $T_n \to \ell$. ব্যাপারটা মনে মনে এঁকে নাও-- T_n-গুলো হল absolute series-টার partial sum. যেহেতু সেই series-এর সব term-ই ≥ 0, তাই $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ এইভাবে বাড়তে বাড়তে ℓ-এর দিকে চলেছে। অতএব এক সময়ে T_n-গুলো $\ell - \epsilon$-এর ডান দিকে চলে যেতে বাধ্য। কিন্তু অবশ্যই ℓ-এর ডান দিকে যেতে পারবে না।

Since T_n's increase to ℓ, hence $\exists N \in \mathbb{N} \quad \ell - \epsilon < T_N \leq \ell$.

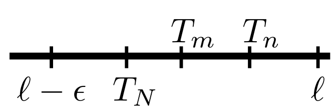
ছবি দিয়ে ভাবলে--



$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall n, m$ Take any $n > m \geq N$.

বুঝে নাও যে, ছবিতে T_m আর T_n-র অবস্থান হবে এইরকম--



Then

$$
\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \left|\sum_{m+1}^{n} z_k\right| \\
&\leq \sum_{m+1}^{n} |z_n| \quad \left[\text{by triangle inequality}\right] \\
&= T_n - T_m.
\end{aligned}
$$

Now $\ell - \epsilon < T_N \leq T_m \leq T_n \leq \ell$. So $T_n - T_m < \epsilon$.

Thus $|S_n - S_m| < \epsilon$, as required.

▮

[Q.E.D]

তাহলে আমরা দেখলাম যে, absolute convergence হলে convergence-ও হয়। কিন্তু এর উল্টো দিকটা মোটেই ঠিক নয়। এমন series সম্ভব, যেটা converge করে, কিন্তু absolutely converge করে না। এরকম উদাহরণ real analysis-এই তোমরা দেখেছ, $z_n = \frac{(-1)^n}{n}$ নিলে $\sum z_n$-টা দিব্যি converge করে, কিন্তু $\sum |z_n|$ মোটেই converge করে না।
এই কয়টা জিনিস ভালো করে বুঝে থাকলে এদের মিলিয়ে জুলিয়ে নীচের অংকটা এক লাইনেই হয়ে যাবে। চেষ্টা করে দ্যাখো।

Exercise 10: যদি $\{z_n\}_n$ এমন একটা complex সংখ্যার sequence হয়, যাতে $\limsup |z_n|^{1/n} < 1$, তবে দেখাও যে $\sum z_n$ অবশ্যই absolutely converge করতে (এবং সুতরাং converge করতে) বাধ্য। ■

এবারের অংকটা এরই উল্টো দিক, কিন্তু আক্রমণ করতে হবে সামান্য অন্যভাবে--

Exercise 11: যদি $\{z_n\}_n$ এমন একটা complex সংখ্যার sequence হয়, যাতে $\limsup |z_n|^{1/n} > 1$, তবে দেখাও যে $\sum z_n$-এর পক্ষে converge করা অসম্ভব।
HINT: সাবধান। এখানে absolutely converge করা দিয়ে ভাবলে মুশকিল হবে। কারণ কোনো series যদি absolutely converge নাও করে, তাও কিন্তু সেটা converge করতেই পারে। এখানে proof by contradiction লাগালে সুবিধা হবে। আমাদের অংকে $\limsup |z_n|^{1/n} > 1$ বলেছে। তার মানে একটা subsequence অন্ততঃ আছে, যেটা ধরে এগোলে এক সময়ে $|z_n|^{1/n} > 1$ হবে। সুতরাং subsequence-টা ধরে এগোলে $|z_n|$-গুলোও এক সময়ে > 1 হবে। অতএব আর যাই হোক $z_n \to 0$ হতে পারে না। এবার নিজে নিজে চিন্তা করো। ■

29.2 Radius of convergence

29.2.1 Root test দিয়ে

এইবার আমরা radius of convergence বার করার করার প্রথম কায়দাটা প্রমাণ করতে পারব। জিনিসটাকে প্রথমে একটা theorem-এর আকারে লিখে নেওয়া যাক--

Cauchy-Hadamard theorem

Consider the power series $\sum a_n(z-c)^n$. Let $\ell = \limsup_n |a_n|^{1/n}$.

1. If $\ell = 0$, then the power series converges for all $z \in \mathbb{C}$, *i.e.*, radius of convergence is ∞.
2. If $\ell = \infty$, then the power series converges only for $z = c$, *i.e.*, radius of convergence is 0.
3. if $\ell \in (0, \infty)$, then the power series converges for all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z-c| < \frac{1}{\ell}$ and does not converge if $|z-c| > \frac{1}{\ell}$, *i.e.*, radius of convergence is $\frac{1}{\ell}$.

Proof:

Let $z_n = a_n(z-c)^n$ for $n = 0, 1, 2, ...$
By root test (for nonnegative real series) we know that
if $\limsup |z_n|^{1/n} < 1$, then $\sum |z_n|$ converges and hence $\sum z_n$ converges.
Also, if $\limsup |z_n|^{1/n} > 1$, then $z_n \not\to 0$.

⟦ Because:

Let $\limsup |z_n|^{1/n} = \alpha > 1$.
Then we have a subsequence $\{z_{n_k}\}_k$ such that $|z_{n_k}|^{1/n_k} \to \alpha$.
Since $\alpha > 1$, hence $\exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad |z_{n_k}|^{1/n_k} > 1$.
So $\forall k \geq K \quad |z_{n_k}| > 1$.
একটা subsequence যদি 1-এর ডান দিকে আটকে গেল তো z_n-রা আর 0-তে converge করে কী করে?
Thus, $z_n \not\to 0$.

⟧

Hence $\sum z_n$ does not converge.

এখানে সেই ছোট্টো theorem-টা কাজে লাগালাম, $\sum z_n$-কে যদি converge করতে হয় তো $z_n \to 0$ হতেই হত।

Here $|z_n|^{1/n} = |a_n|^{1/n}|z-c|$.

$$\therefore \limsup |z_n|^{1/n} = \begin{cases} \ell|z-c| & \text{if } \ell \in [0,\infty) \\ 0 & \text{if } \ell = \infty \text{ and } z = c \\ \infty & \text{if } \ell = \infty \text{ and } z \neq c \end{cases}.$$

এইবার আমরা তিনটে কেসে ভেঙে এগোব।

- If $\ell = 0$, then $\limsup |z_n|^{1/n} = 0$ for all $z \in \mathbb{C}$. So the power series converges (absolutely) for all $z \in \mathbb{C}$, ie, radius of convergence is ∞.
- If $\ell = \infty$, then $\limsup |z_n|^{1/n} = \infty$ if $z \neq c$ and 0 if $z = c$. So the power series converges (absolutely) only for $z = c$, ie, radius of convergence is 0.
- If $\ell \in (0,\infty)$, then $\limsup |z_n|^{1/n} < 1$ if $|z-c| < \frac{1}{\ell}$ and > 1 if $|z-c| > \frac{1}{\ell}$. So the power series converges (absolutely) if $|z-c| < \frac{1}{\ell}$, and does not converge if $|z-c| > \frac{1}{\ell}$. Thus, the radius of convergence is $\frac{1}{\ell}$.

Hence the result.

[Q.E.D]

এই প্রমাণটা থেকে আমরা একটা বাড়তি তথ্যও পেয়ে গেলাম--যদি কোনো power series-এর radius of convergence হয় $R > 0$ আর centre হয় c, তবে $z \in N(c,R)$-এর জন্য power series-টা শুধু converge করে তাই নয়, সেই convergence-টা আবার absolute convergence-ও হতে বাধ্য! আরও লক্ষ কর যে, $|z-c| = R$ হলে (মানে z যদি

$N(c,R)$-এর একেবারে boundary-তে থাকে), তবে কী হবে সে বিষয়ে আমরা নীরব, সেখানে convergence হতে পারে, absolute convergence-ও হতে পারে, আবার converge নাও করতে পারে।

29.2.2 Ratio test দিয়ে

আমরা radius of convergence বার করার একটা সহজ কায়দা শিখেছিলাম। তার জন্য $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ বার করতে হত। যদি limit-টা exist করে (∞ হলেও আপত্তি নেই), তবে সেটাই হবে radius of convergence। কিন্তু যদি exist না করে, তবে কিছুই বলা যাবে না।
এবার প্রমাণ করব এই কায়দাটা কেন কাজ করে। আগে পুরো ব্যাপারটাকে অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখে নিই--

> THEOREM
>
> We consider the power series $a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots$, where $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$ exists (may be ∞). Then R is the radius of convergence of the power series.

Proof: এই প্রমাণটার কাঠামো একেবারেই আগের প্রমাণটার মতই, খালি root test-এর জায়গায় ratio test, এই যা তফাৎ।

> Let $z_n = a_n(z-c)^n$ for $n = 0, 1, 2, ...$
> By ratio test (for nonnegative real series) we know that if $\lim \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1$, then $\sum |z_n|$ converges and hence $\sum z_n$ converges.

এখানে একটু সতর্ক থেকো--theorem-টায় $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ ছিল, উপরে n, নীচে $n+1$. কিন্তু এখানে কাজ করছি $\lim \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ নিয়ে, উপরে $n+1$, নীচে n.

> Also, if $\lim \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$, then $z_n \not\to 0$.
>
> [[Because:
>
> Let $\lim \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \alpha > 1$. Fix any $t \in (1, \alpha)$.
> Then $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \geq t$.
> So $\forall n \geq N \quad |z_n| \geq |z_N| t^{n-N}$.
> So $|z_n| \to \infty$, since $t > 1$.
> Hence $z_n \not\to 0$.
>
>]]
>
> Hence $\sum z_n$ does not converge.

সেই ছোট্টো theorem-টা আবার কাজে এল এখানে, $\sum z_n$ যদি converge করে, তবে $z_n \to 0$ হতে বাধ্য।

> Here
> $$\lim \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|a_{n+1}(z-c)^{n+1}|}{|a_n(z-c)^n|} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z-c| = \frac{|z-c|}{R}.$$

ব্যস্, হয়েই গেল--

Clearly this is $\leqslant 1 \iff |z-c| \leqslant R$.
Hence the result.

[Q.E.D]

DAY 30
প্রমাণ (part 2)

আজ থেকে আমরা power series-এর continuity নিয়ে, এবং একটা power series-কে differentiate আর integrate করা নিয়ে বিভিন্ন প্রমাণের আলোচনা শুরু করব। সেখানে একটা ধারণা বার বারই কাজে দেবে। সেটা হল uniform convergence. আজকে আমাদের শেখার বিষয় সেইটাই।

30.1 Uniform convergence

ধরো একটা power series আছে--

$$f(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots,$$

যার radius of convergence বলা আছে $R > 0$. যদি এর partial sum-গুলোকে $S_n(z)$ নাম দিই, মানে

$$S_n(z) = a_0 + a_1(z-c) + \cdots + a_n(z-c)^n,$$

তবে radius of convergence-এর সংজ্ঞা থেকেই আমরা জানি যে, $\forall z \in N(c,R) \quad S_n(z) \to f(z)$ হবে। একটু বিস্তারিতভাবে লিখলে হয়--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall z \in N(c,R) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |S_n(z) - f(z)| < \epsilon. \tag{*}$$

এই লম্বা জিনিসটার বাংলা মানে হল--

> যা খুশি $\epsilon > 0$ আর $z \in N(c,R)$ নাও। তবে একটা পর্যায়ের পর থেকে $S_n(z)$-গুলো $f(z)$-এর ϵ দূরত্বের মধ্যে চলে আসবে।

এখানে N হল সেই "পর্যায়"-টা[4]। লক্ষ করো $\exists N$ এসেছে $\forall z$-এর পরে। তার মানে N-টা z-এর উপরে নির্ভর করতে পারে। ব্যাপারটা বুঝে নাও--

> প্রথমে $N(c,R)$-এর মধ্যে যে কোনো দুটো z_0 আর z_1 নাও। ধরো $z = z_0$-এর জন্য $N = 1000$ পেলে, অর্থাৎ $n \geq 1000$ হলেই $|S_n(z_0) - f(z_0)| < \epsilon$ হচ্ছে। কিন্তু এমন কোনো গ্যারান্টি নেই যে তখন $|S_n(z_1) - f(z_1)|$-ও $< \epsilon$ হবে!

সুতরাং স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে, N-এর এমন একটা value কি পাওয়া যায় না, যেটা সব $z \in N(c,R)$-এর জন্যই কাজ করে? উত্তর হল, নাঃ, তেমন কোনো গ্যারান্টি নেই। তবে একটা জিনিস বলা যায়--যদি পুরো $N(c,R)$ নিয়ে কাজ না করে সামান্য ছোটো কোনো $N(c,r)$ নিয়ে কাজ করো (যেখানে $0 < r < R$), তবে এরকম N পাওয়া যাবেই, অর্থাৎ যদি $0 < r < R$ হয়, তবে--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall z \in N(c,r) \quad \forall n \geq N \quad |S_n(z) - f(z)| < \epsilon. \tag{**}$$

এটাও দেখতে প্রায় (*)-এর মতই, খালি দুটো পার্থক্য। এক, R-এর জায়গায় r রয়েছে। আর দুই, এখানে $\exists N$-টা চলে এসেছে $\forall z$-এর আগে। এই (**)-কে আমরা সংক্ষেপে এভাবেও প্রকাশ করে থাকি--

---

[4] সাবধান, এই N-এর সঙ্গে যেন neighbourhood-এর চিহ্ন $N(c,R)$-এর 'N' অক্ষরটা গুলিয়ে ফেলো না!

$S_n(z) \to f(z)$ uniformly for $z \in N(c, r)$.

Uniform convergence-এর সংজ্ঞাটা গুছিয়ে লিখে নেওয়া যাক।

DEFINITION: Uniform convergence

Suppose that $D \subseteq \mathbb{C}$ and $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ are functions $(n = 0, 1, 2, ...)$. We say that $f_n \to f$ uniformly on D if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall z \in D \quad \forall n \geq N \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Power series-এর আলোচনায় uniform convergence-এর ধারণাটা গুরুত্বপূর্ণ নীচের theorem-টার জন্য, যার মূল বক্তব্য আমরা এক্ষুণি সহজ বাংলায় বললাম।

Uniform convergence of a power series

Let $S_n(z)$ be the n-th partial sum of the power series

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \cdots .$$

Let the power series have radius of convergence $R > 0$. Then for any $0 < r < R$, we have $S_n(z) \to f(z)$ uniformly for $z \in N(c, r)$.

এই theorem-টা প্রমাণ করার জন্য কিছু তোড়জোড় করতে হবে। সেটা শুরু করা যাক।

30.2 Uniform convergence-এর প্রমাণের প্রস্তুতি

প্রমাণটা সরাসরি সংজ্ঞা দিয়ে করা একটু কঠিন। তাই আমরা ধাপে ধাপে এগোব। প্রথম ধাপ হল uniform convergence-এর জন্য Cauchy criterion--

Uniform Cauchy criterion

Let $\{f_n\}_n$ be any sequence of functions from D to $\mathbb{C}$, where $D \subseteq \mathbb{C}$. The sequence converges uniformly on $D \iff$ it is uniformly Cauchy, *i.e.*,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall z \in D \quad \forall n > m \geq N \quad |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon. \qquad (***)$$

এই (***) শর্তটাকেই বলে uniform Cauchy criterion.

Proof:

($\Longleftarrow$ part) :

প্রথমে লিখে নিই, কী দেখাতে হবে। দেখাতে হবে f_n-রা uniformly converge করে, অর্থাৎ এমন কোনো $F : D \to \mathbb{C}$ আছে যাতে f_n-রা uniform-ভাবে F-এ converge করে, মানে--

Shall show

$$\exists F : D \to \mathbb{C} \quad \forall \eta > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall z \in D \quad \forall n \geq N \quad |f_n(z) - F(z)| < \eta.$$

এখানে η অক্ষরটা ব্যবহার করেছি, কারণ theorem-টার মধ্যে ϵ ব্যবহার হয়ে গেছে।
প্রথমেই আমাদের কাজ হল $F(z)$-টাকে শনাক্ত করা। এটা $D \to \mathbb{C}$ একটা function. তাই $F(z)$-কে শনাক্ত করা মানে হল যাবতীয় $z_0 \in D$-এর জন্য $F(z_0)$ কী হবে সেটা বার করা।

Fix any $z_0 \in D$.
From the given condition (***),

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad |f_n(z_0) - f_m(z_0)| < \epsilon.$$

So the sequence $\{f_n(z_0)\}_n$ is a Cauchy sequence, and hence convergent in $\mathbb{C}$. Let the limit be called $F(z_0)$.

অর্থাৎ, প্রতিটা $z_0 \in D$-এর জন্যই আমরা $\lim f_n(z_0)$ বার করে একটা করে সংখ্যা পাচ্ছি। সেই সংখ্যাটাকেই আমরা $F(z_0)$ নাম দিলাম।

Since $z_0 \in D$ was arbitrary, we get a function $F : D \to \mathbb{C}$.

$\exists F$ Choose this function $F : D \to \mathbb{C}$.

এবার একটা $\forall \eta > 0$ আছে, তাই--

$\forall \eta$ Take any $\eta > 0$.

এরপর আছে $\exists N \in \mathbb{N}$. সুতরাং একটা জুৎসই N পেতে হবে--

By (***)

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad \forall z \in D \quad |f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\eta}{2}.$$

এখানে আমরা (***)-এ ϵ-এর জায়গায় $\frac{\eta}{2}$ বসিয়ে এটা পেয়েছি।

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall z, n$ Take any $z \in D$ and any $n \geq N$.

Shall show $|f_n(z) - F(z)| < \eta$.

Now, since $f_m(z) \to F(z)$, hence $\exists M \in \mathbb{N} \quad |f_M(z) - F(z)| < \frac{\eta}{2}$.

So

$$\begin{aligned}|f_n(z)-F(z)| &= |f_n(z)-f_M(z)+f_M(z)-F(z)|\\ &\le |f_n(z)-f_M(z)|+|f_M(z)-F(z)| \quad \Big[\text{by triangle inequality}\Big]\\ &< \frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}=\eta,\end{aligned}$$

as required.

এবার উল্টো দিকটা প্রমাণ করব।

<u>($\Longrightarrow$ part):</u> Given that $f_n(z)$ converges uniformly over D.

এবার দেখাতে হবে (***)।

Shall show

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall z\in D \quad \forall n>m\ge N \quad |f_n(z)-f_m(z)|<\epsilon.$$

লক্ষ করো, $\exists N$ রয়েছে $\forall z$-এর আগে, কারণ এটা <u>uniform</u> Cauchy criterion.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon>0$.

Since $\{f_n(z)\}_n$ converges uniformly over D,

$$\exists F:D\to\mathbb{C} \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall z\in D \quad \forall n\ge N \quad |f_n(z)-F(z)|<\frac{\epsilon}{2}.$$

$\exists N$ Choose this $N\in\mathbb{N}$.

$\forall z$ Take any $z\in D$.

$\forall n,m$ Take any $n>m\ge N$.

আমাদের এবার দেখাতে হবে $|f_n(z)-f_m(z)|<\epsilon$, মানে f_n আর f_m খুব কাছাকাছি থাকবে। আমরা দেখিয়েছি যে, f_m আর f_n দুজনেই F-এর খুব কাছে। সুতরাং ওরা নিজেদের মধ্যেও খুব কাছাকাছি আসতে বাধ্য। সেটাই অংকে ভাষায় প্রকাশ করব--

Then, by triangle inequality,

$$|f_n(z)-f_m(z)|=|f_n(z)-F(z)+F(z)-f_m(z)|\le|f_n(z)-F(z)|+|f_m(z)-F(z)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

as required.

[Q.E.D]

আমরা uniform convergence নিয়ে আলোচনা করছি। প্রথমে সংজ্ঞাটা বলেছিলাম, এবং এও বলেছিলাম যে, সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করে এগোনো একটু কষ্টকর। তার চেয়ে বরং একটু সহজ uniform Cauchy criterion লাগানো। কারণ-- যদি একটা function-এর sequence যদি দেওয়া থাকে $\{f_n(z)\}_n$, আর সেটাকে uniformly convergent দেখাতে হয়, তবে--

> সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করার জন্য প্রথমে $f_n(z)$-গুলো কোন্ $F(z)$-এ converge করছে সেটাও জানতে হয়। কিন্তু uniform Cauchy criterion-এ সেটা লাগে না।

এবার ব্যাপারটাকে আরেক ধাপ সহজ করব, Weierstrass' M-test নামে একটা theorem দিয়ে। এটা uniform Cauchy criterion-এর চেয়েও ব্যবহার করা সহজ, কারণ--

> এখানে function-এর sequence-এর বদলে একটা real সংখ্যার sequence নিয়ে কাজ করলেই চলে।

Weierstrass' M-test-এর প্রমাণ অবশ্য uniform Cauchy criterion দিয়েই হয়।

Weierstrass' M-test

Let $\{f_n\}_n$ be any sequence of functions from D to $\mathbb{C}$, where $D \subseteq \mathbb{C}$. Let each f_n be bounded by some $M_n > 0$ on D, ie,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists M_n > 0 \quad \forall z \in D \quad |f_n(z)| \leq M_n.$$

If $\sum M_n < \infty$, then $\sum f_n(z)$ converges uniformly on D.

Proof: প্রথমেই partial sum-গুলোর নাম দিয়ে নিই--

Let $S_n : D \to \mathbb{C}$ be defined by $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.

দেখাতে হবে যে, S_n-গুলো uniformly converge করবে।

Enough to show that $\{S_n(z)\}_n$ satisfies the uniform Cauchy criterion, ie,

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall z \in D \quad \forall n > m \geq N \quad |S_n(z) - S_m(z)| < \epsilon.$

$\forall \epsilon$ Take $\epsilon > 0$.

$\because \sum M_n < \infty$,

$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=N}^{\infty} M_k < \epsilon.$

⟦ Because:

$$\sum_{k=N}^{\infty} M_k = \sum_{k=0}^{\infty} M_k - \sum_{k=0}^{N-1} M_k \to 0.$$

⟧

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall z, m, n$ Take any $z \in D$ and any $n > m \geq N$.

Then

$$\begin{aligned} |S_n(z) - S_m(z)| &= \left|\sum_{m+1}^{n} f_k(z)\right| \\ &\leq \sum_{m+1}^{n} |f_k(z)| \quad \left[\text{by triangle inequality}\right] \\ &\leq \sum_{m+1}^{n} M_k \\ &\leq \sum_{N}^{\infty} M_k \quad [\because M_k > 0 \text{ and } m \geq N] \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

[Q.E.D]

ব্যস্, একটা power series-এর uniform convergence-এর প্রমাণের প্রস্তুতি শেষ হল। এবার আসল প্রমাণটায় হাত দেব। প্রমাণটা অতি সংক্ষেপেই হবে।

30.3 Uniform convergence-এর প্রমাণ

প্রথমে theorem-টা আরেকবার লিখে নিই, যাতে কী প্রমাণ করতে চলেছি, সেটা চোখের সামনে থাকে।

Uniform convergence of a power series

Let $S_n(z)$ be the n-th partial sum of the power series

$$f(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots .$$

Let the power series have radius of convergence $R > 0$. Then for any $0 < r < R$, we have $S_n(z) \to f(z)$ uniformly for $z \in N(c,r)$.

Proof: আমরা Weierstrass' M-test লাগব। তার জন্য $a_n(z-c)^n$-এর এমন একটা bound পেতে হবে M_n, যাতে $\sum M_n < \infty$ হয়। যেহেতু $z \in N(c,r)$ নিয়ে কাজ হচ্ছে, তাই $|z-c| < r$ হবে। অতএব--

We have $\forall z \in N(c,r) \quad |a_n(z-c)^n| \leq |a_n| r^n = M_n$, say.

Now $\sum M_n < \infty$.

এটা দেখাব root test দিয়ে--

⟦ Because:

$$\begin{aligned}\limsup|M_n|^{1/n} &= \limsup|a_n|^{1/n}|z-c| \\ &= |z-c|\limsup|a_n|^{1/n} \\ &< r\limsup|a_n|^{1/n} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } R=\infty \\ \frac{r}{R} & \text{if } R\in(0,\infty)\end{cases}\end{aligned}$$

So, in either case, $\limsup|M_n|^{1/n}<1$. Hence $\sum M_n<\infty$ by root test.

⟧

So the result now follows by Weierstrass' M-test.

[Q.E.D]

DAY 31
প্রমাণ (part 3)

31.1 Continuity

এবার যেটা প্রমাণ করব সেটাকে এক কথায় বললে হয়--power series-রা সর্বদা continuous হয়। অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখলে দাঁড়াবে এইরকম--

THEOREM

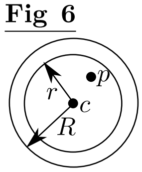
Let

$$f(z)=a_0+a_1(z-c)+a_2(z-c)^2+\cdots$$

be a power series with radius of convergence $R>0$. Then $f(z)$ is continuous over $N(c,R)$.

Proof: আমরা দেখাতে চাইছি যে, যাই $p\in N(c,R)$ নাও না কেন, $z=p$-তে $f(z)$-টা continuous হবে, মানে--

Fig 6



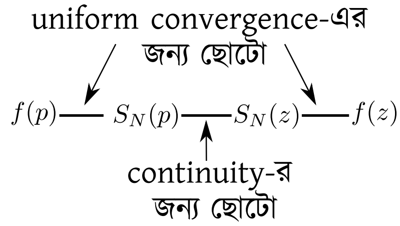


Fig 7

Shall show

$\forall p \in N(c,R) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in N(p,\delta) \quad |f(z) - f(p)| < \epsilon.$

$\boxed{\forall p, \epsilon}$ Take any $p \in N(c,R)$ and any $\epsilon > 0$.

এবার আমরা uniform convergence লাগাব, তার জন্য $N(c,R)$ নিয়ে কাজ করলে চলবে না, একটু ছোটো কোনো $N(c,r)$ নিতে হবে। কিন্তু খেয়াল রাখতে হবে যে r-টা যেন এত ছোটো হয়ে না যায় যে, p-টা $N(c,r)$-এর বাইরে গিয়ে পড়ে। Fig 6 দ্যাখো।

Here $|p-c| < R$. Fix any r such that $|p-c| < r < R$.

এইবার আমরা uniform convergence-এর প্রসঙ্গটা আনব--

Let $S_n(z) = a_0 + a_1(z-c) + \cdots + a_n(z-c)^n$, for $n = 0, 1, 2, ...$

By standard result, $S_n \to f$ uniformly on $N(c,r)$.

এবার কী করব শোনো। আমরা জানি যে, S_n-রা সবাই continuous (কারণ ওরা সকলেই polynomial)। এদিকে S_n-রা f-এর সঙ্গে একেবারে মিশে যাচ্ছে। তাই f-ও continuous হতে বাধ্য। এ জিনিসটাই ধাপে ধাপে প্রমাণ করব। আমাদের দেখাতে হবে z যখন p-এর যথেষ্ট কাছে আসবে, তখন $f(z)$ আসবে $f(p)$-র খুব কাছে। প্রথমে এমন একটা $n = N$ নেব যাতে S_N আর f একেবারে গায় গায় থাকে। তাহলে $S_N(p)$ আর $S_N(z)$ যথাক্রমে $f(p)$ আর $f(z)$-এর খুব কাছে থাকবে। আবার S_N নিজে continuous হওয়ায় $S_N(p)$ আর $S_N(z)$-ও খুব কাছাকাছি। সুতরাং এদের পরপর বসিয়ে একটা মালা পাচ্ছি (Fig 7)। এই মালার তিনটে দূরত্বকেই আমরা $< \frac{\epsilon}{3}$ রাখব, ব্যস্ তাহলেই $|f(z) - f(p)| < \epsilon$ হবে।

So $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall z \in N(c,r) \quad |S_N(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}.$

Since $S_N(z)$ is continuous at $z = p$,

hence $\exists \delta > 0 \quad \forall z \in N(p,\delta) \quad |S_N(z) - S_N(p)| < \frac{\epsilon}{3}.$

$\boxed{\exists \delta}$ Choose this $\delta > 0$.

$\boxed{\forall z}$ Take any $z \in N(p,\delta)$.

Then

$$\begin{aligned} & |f(z) - f(p)| \\ = \; & |f(z) - S_N(z) + S_N(z) - S_N(p) + S_N(p) - f(p)| \\ \leq \; & |f(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(p)| + |S_N(p) - f(p)| \quad \left[\text{by triangle inequality}\right] \\ < \; & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

[Q.E.D]

31.2 Term by term differentiation

এবার আমরা প্রমাণ করব কেন একটা power series-কে term-by-term differentiate করা যায়। ব্যাপারটা কী ছিল সেটা প্রথমে একটু মনে করে নিই।
ধরো একটা power series আছে

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \cdots,$$

যার radius of convergence হল $R > 0$. আমরা দাবী করেছিলাম যে, এই $f(z)$-টা differentiable হবেই, এবং যাবতীয় $z \in N(c, R)$-এর জন্য

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - c) + 3a_3(z - c)^2 + \cdots$$

হবে। এবং এই নতুন power series-টার radius of convergence-ও হবে সেই R.
এবার এই সব কিছু আমরা প্রমাণ করব। প্রথমে শুরু করব radius of convergence-এর প্রমাণ দিয়ে।

THEOREM

Let the power series

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - c)^n$$

have radius of convergence R (may be 0, positive or ∞). Then the power series

$$g(z) = \sum_1^\infty n a_n(z - c)^{n-1}$$

also has radius of convergence R.

Proof: এখানে আমাদের কাজে লাগবে দুটো তথ্য। এক--

We know that $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ as $n \to \infty$.

আর দুই--

Also, if for any two positive real sequences $\{u_n\}_n$ and $\{v_n\}_n$ we have $u_n \to U \in (0,\infty)$ and $v_n \to V \in \mathbb{R}$, then $u_n^{v_n} \to U^V$.

⟦ Because:

$u_n^{v_n} = e^{v_n \log u_n} \to e^{V \log U} = U^V$, using continuity of e^x and $\log x$.

⟧

Also, if $U = \infty$ and $V > 0$, then $u_n^{v_n} \to \infty$.

এবার $\limsup$-এর কায়দায় radius of convergence বার করে ফেললেই হবে--

Since $f(z)$ has radius of convergence R, we have

$$\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}} = R.$$

একই কায়দা $g(z)$-এর উপর লাগানোর জন্য $g(z)$-কে $b_0 + b_1(z-c) + \cdots$ আকারে লিখে নিলে সুবিধা হবে।

Also, $g(z) = b_0 + b_1(z-c) + \cdots$, where $b_n = (n+1)a_{n+1}$.
So the radius of convergence of $g(z)$ is

$$\limsup_n |b_n|^{1/n} = \limsup_n |(n+1)a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_n (n+1)^{\frac{1}{n}} \times \limsup_n |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} \quad (*)$$

এবার এই দুটো $\limsup$-কে আলাদা করে বার করব। আমরা জানি $n \to \infty$ হলে $n^n \to 1$ হবে। কিন্তু এখানে রয়েছে $(n+1)^n$. তাই সামান্য কায়দা করতে হবে। কায়দাটা হল মূলতঃ এই--যদি $n \to \infty$ হয়, তবে $\frac{n+1}{n} \to 1$ হয়।

$$\limsup_n (n+1)^{\frac{1}{n}} = \limsup_n n^{\frac{1}{n}} \left(\tfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_n n^{\frac{1}{n}} \times \limsup_n \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

এখানে আমার $\limsup$ লেখার দরকার নেই, কারণ দুটোরই limit আছে--

Now $\limsup_n n^{\frac{1}{n}} = \lim_n n^{\frac{1}{n}} = 1$ and $\limsup_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1$.

এইবার অন্য $\limsup$-টার ব্যবস্থা করি--

$$\limsup_n |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_n \left(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} = R.$$

ব্যস্, দুটো $\limsup$-ই বেরিয়ে গেল। এবার দুটোকে গুণ করে দেবার অপেক্ষা।

Hence from (*) we have $\limsup_n |b_n|^{1/n} = R$, as required.

[Q.E.D]

এইবার মূল theorem-টায় আসা যাক।

Term-by-term differentiation

Let the power series
$$f(z)=\sum_0^\infty a_n(z-c)^n$$
have radius of convergence $R>0$. Then $f(z)$ is differentiable at each $z\in N(c,R)$, and
$$f'(z)=\sum_1^\infty na_n(z-c)^{n-1}.$$

Proof: প্রথমেই বলে রাখি, এর প্রমাণটা খুব সহজ নয়। চাইলে এখন চোখেমুখে একটু জল দিয়ে আসতে পারো। এখানে binomial theorem একটা গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করবে। একটু মনে করিয়ে দিই--
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a^{n-k}b^n.$$
এর প্রথম দুটো term হল a^n আর $na^{n-1}b$. লক্ষ করো sum-টা শুরু হয়েছে $k=0$ থেকে, আর গেছে n অব্ধি। ওই একই n রয়েছে প্রতিটা $\binom{n}{k}$-র উপরতলাতেও। আরেকটা জিনিসও মনে করিয়ে দিই, হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে শিখেছিলে--
$$r\binom{n}{r}=n\binom{n-1}{r-1}.$$
এটাকে আরেকবার লাগালে হবে--
$$r(r-1)\binom{n}{r}=n(n-1)\binom{n-2}{r-2}.$$
এই কটা জিনিস মাথায় রেখে প্রমাণটা শুরু করা যাক।

> Let
> $$g(z)=\sum_1^\infty na_n(z-c)^{n-1},$$
> which has radius of convergence R by standard result.

এই "standard result"-টা হল আমাদের আগের theorem-টা। লক্ষ করো, এখানে sum-টা $n=1$ থেকে শুরু করেছি। কিন্তু $n=0$ থেকে শুরু করলেও একই থাকত, কারণ $n=0$-র জন্য ভিতরের জিনিসটা 0 হত। এই জিনিসটা আমাদের একটু পরে কাজে লাগবে।
আমাদের দেখাতে হবে $f'(z)=g(z)$. আমরা কিন্তু এটাও এখনও পর্যন্ত জানি না যে f-টা আদৌ differentiable কিনা। সেটাও আমাদের প্রমাণ করতে হবে। তাই আমরা দেখাব যে
$$\lim_{h\to0}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right)=0.$$
বার বার করে $z-c$ লেখাটা বিরক্তিকর, তাই ওটাকে প্রথমেই একটা সংক্ষিপ্ত নাম দিয়ে নিই--

Let $w = z - c$. Then

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) = \frac{1}{h}\sum_{0}^{\infty}\left[a_n(w+h)^n - a_n w^n - nha_n w^{n-1}\right]$$

এইটা ঠাণ্ডা মাথায় বুঝে নাও। এখানে sum-টা $n = 0$ থেকে শুরু হয়েছে। কিন্তু আসলে $n = 0$ আর $n = 1$ হলে sum-এর ভিতরের জিনিসটা 0 হচ্ছে। তাই $n = 2$ থেকে শুরু করলেই হত।

$$= \frac{1}{h}\sum_{2}^{\infty} a_n\left[(w+h)^n - w^n - nhw^{n-1}\right]$$

এবার লক্ষ করো ওই $(w+h)^n$-টাকে binomial theorem দিয়ে বড় করে লিখলে প্রথম দুটো term চমৎকার কেটে যাচ্ছে।

$$= \frac{1}{h}\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k w^{n-k}\right]$$

এখানে $k = 2$ থেকে শুরু হচ্ছে। তাই sum-এর প্রতিটা term-এই অন্ততঃ h^2 আছে। সেটা "কমন" নিয়ে বার করে আনো। একটা h কেটে যাবে $\frac{1}{h}$-টার সাথে।

$$= h\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-2} w^{n-k}\right]$$

এবার আমরা ওই sum-টাকে ফের binomial theorem দিয়ে গুটিয়ে ফেলতে চাই। কাজটা ধাপে ধাপে করব। প্রথম ধাপে sum-এর index-টাকে এমনভাবে নেব, যাতে 0 থেকে শুরু হয়--

$$= h\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n \sum_{r=0}^{n-2}\binom{n}{r+2}h^{r} w^{n-r-2}\right] \quad \left[\text{putting } r = k-2\right]$$

এবার binomial theorem-এর চেহারাটা চাই, তাই $\binom{n}{r+2}$-র বদলে $\binom{n-2}{r}$ হলে সুবিধা হবে।

$$= h\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n \sum_{r=0}^{n-2}n(n-1)\binom{n-2}{r}h^{r} w^{n-r-2}\right]$$

Since $\binom{n}{r+2} = n(n-1)\binom{n-2}{r}$

$$= h\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)a_n \sum_{r=0}^{n-2}\binom{n-2}{r}h^{r} w^{n-r-2}\right]$$

এবার binomial theorem লাগালে ভিতরের sum-টা হয়ে যাচ্ছে $(h+w)^{n-2}$.

$$= h\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(h+w)^{n-2}.$$

আমাদের দেখাতে হবে $h \to 0$ হলে এই জিনিসটা 0-র দিকে যাবে।

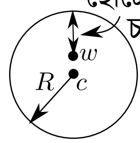


Fig 8

এখানে h-এর সঙ্গে একটা power series গুণ হয়ে আছে, $\sum_2^\infty n(n-1)a_n(h+w)^{n-2}$. যদি দেখাতে পারি যে $h \to 0$ হলে এই power series-টা কোনো finite limit-এ যায়, তবেই কেল্লা ফতে, কারণ বাইরের ওই h-টাই তবে পুরো জিনিসটাকে টেনে 0-র দিকে নিয়ে যাবে।
এখানে আমাদের আগের theorem-টা কাজে লাগবে।

> We have convergence of $\sum a_n w^n$ for $|w| < R$.
>
> So, from standard result, we know that $\sum n a_n w^{n-1}$ converges for $|w| < R$.
>
> Using the result again, we see that $\sum n(n-1)a_n w^{n-2}$ also converges for $|w| < R$.

সমস্যা খালি একটাই, আমাদের বেলায় $\sum n(n-1)a_n w^{n-2}$-এর বদলে আছে $\sum n(n-1)a_n(w+h)^{n-2}$. যদি $|h|$-টাকে যথেষ্ট ছোটো নিই, তবে কিন্তু $|w+h|$-ও $< R$ হতে বাধ্য (Fig 8)। একটু গুছিয়ে লিখে নিই--

> Since $z \in N(c,R)$, hence $|w| < R$. So $\forall h$ with $|h| < R - |w|$, we have $|h+w| \le |h| + |w| < R$.
>
> Hence $\forall h \in N(0, R-|w|)$ the power series $\sum_2^\infty n(n-1)a_n(h+w)^{n-2}$ converges to some $p(h)$, say.
>
> By continuity property of power series, $p(h) \to p(0)$ as $h \to 0$.

ব্যস্ আর কী বাকি রইল?

> Hence, as $h \to 0$, we have $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) \to 0 \times p(0) = 0$, as required.

[Q.E.D]

এই term by term differentiation-এর থেকে power series-এর আরেকটা ধর্ম খুব সহজে চলে আসে--

Uniqueness theorem

If two power series $\sum_0^\infty a_n(z-c)^n$ and $\sum_0^\infty b_n(z-c)^n$ both converge to the same value for all $z \in N(c,r)$ for some $r > 0$, then $\forall n \quad a_n = b_n$.

Proof:

Let $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z-c)^n = \sum_0^\infty b_n(z-c)^n$ for $z \in N(c,r)$.
Then differentiating term by term n times we have $f^{(n)}(c) = n!a_n = n!b_n$ for $n = 0, 1, 2....$
Hence $\forall n \quad a_n = b_n$, as required.

[Q.E.D]

DAY 32
প্রমাণ (part 4)

32.1 Term by term integration

এবার আমরা শিখব কেন একটা power series-কে term-by-term ধরে ধরে integrate করা যায়, মানে যদি $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z-c)^n$-এর radius of convergence হয় $R > 0$ আর $N(c, R)$-এর মধ্যে কোনো contour নেওয়া হয় C, তবে কেন

$$\int_C \sum_0^\infty a_n(z-c)^n dz = \sum_0^\infty a_n \int_C (z-c)^n dz$$

হতে বাধ্য। যদি sum-টা একটা finite sum হত, তবে এটা integration-এর নিজস্ব ধর্মের জন্যই হত, তার মধ্যে আলাদা করে কিছু বলার থাকত না। যেমন যদি খালি partial sum-গুলো নিতাম

$$S_n(z) = \sum_0^n a_k(z-c)^k,$$

তবে অবশ্যই

$$\int_C S_n(z)dz = \int_C \sum_0^n a_k(z-c)^k dz = \sum_0^n a_k \int_C (z-c)^k dz$$

হবে। প্রশ্ন হচ্ছে infinite series-এর বেলাতেও তাই হবে কিনা, কারণ infinite series মানে তো আসলে infinite-সংখ্যক জিনিস যোগ করে যাওয়া নয়, ওর মধ্যে একটা limit নেওয়ার গল্প রয়েছে। আসলে $f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$. সুতরাং প্রশ্নটা হল

$$\int_C \lim_{n\to\infty} S_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_C S_n(z)dz$$

হয় কিনা। এর উত্তর যে "হ্যাঁ", সে তো এই অধ্যায়ের গোড়াতেই বলেছি। এখানে সেটা প্রমাণ করব, এবং সেই প্রমাণে মুখ্য ভূমিকা পালন করবে uniform convergence. এখানে uniform convergence কেন গুরুত্বপূর্ণ সেটা বোঝা যাবে নীচের theorem-টা থেকে।

THEOREM

Let $\{f_n\}_n$ be any sequence of functions from D to $\mathbb{C}$, where $D \subseteq \mathbb{C}$. Let $f : D \to \mathbb{C}$ be any function. If $f_n \to f$ uniformly on D then for any contour $C \subseteq D$ we have

$$\int_C f_n dz \to \int_C f dz.$$

Proof:

Shall show

$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \left|\int_C f_n(z)dz - \int_C f(z)dz\right| < \epsilon.$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $\exists N$ আছে, তাই একটা N খুঁজব। লক্ষ করো, f_n-রা ক্রমশঃই f-এর সঙ্গে একেবারে মিশে যাচ্ছে, তাই সব $z \in D$-এর জন্যই $f_n(z) - f(z)$ খুব ছোটো হবে। তা থেকে নিশ্চয়ই দেখানো যাবে যে $\int_C f_n(z) - f(z)dz$-ও খুব ছোটো। আমরা আগে estimation theorem থেকে শিখেছিলাম যে, $|f_n(z) - f(z)| \leq M$ হলে $\left|\int_C f_n(z) - f(z)dz\right| \leq M \times \text{length}(C)$ হয়। সুতরাং $M \times \text{length}(C)$-কে $< \epsilon$ রাখতে পারলেই হবে, মানে $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{\text{length}(C)}$ নেওয়াই যথেষ্ট।

Since $f_n \to f$ uniformly on D,

$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall z \in D \quad \forall n \geq N \quad |f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{\text{length}(C)}$.

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall n$ Take any $n \geq N$.

Then, by the estimation theorem,

$$\begin{aligned}\left|\int_C f_n(z)dz - \int_C f(z)dz\right| &= \left|\int_C \big(f_n(z) - f(z)\big)dz\right| \\ &< \frac{\epsilon}{\text{length}(C)} \times \text{length}(C) = \epsilon,\end{aligned}$$

as required.

[Q.E.D]

Power series-রা যে uniformly converge করে সে তো বলেইছি। সুতরাং এবার term-by-term integration-এর প্রমাণ করে ফেলা যাবে। প্রথমে theorem-টা গুছিয়ে লিখে নিই--

Term by term integration

Let $f(z) = \sum a_n(z-c)^n$ be a power series with radius of convergence $R > 0$. Let C be any contour inside $N(c, R)$. Then

$$\int_C f(z)dz = \sum \int_C a_n(z-c)^n dz.$$

Proof: মনে হতে পারে যে আগের theorem-টা লাগালেই প্রমাণটা হয়ে যাবে। কিন্তু একটা ছোট্টো সমস্যা আছে। Power series-টা uniformly converge করে বটে, কিন্তু সেটা পুরো $N(c, R)$-এর উপরে নয়, তার জন্য সামান্য ছোটো একটা $r \in (0, R)$ নিয়ে $N(c, r)$-এর উপরে কাজ করতে হয়। তাই প্রথমে এমন একটা r পেতে হবে যাতে C-টা পুরোই $N(c, r)$-এর মধ্যে থাকে।

<u>Step 1</u>: Let C be given by $\gamma(t)$ for $t\in[a,b]$.
Shall show that

$$\exists r\in(0,R)\quad \forall t\in[a,b]\quad |\gamma(t)|<r.$$

Here $|\gamma(t)-c|$ is a continuous function from $[a,b]$ to $\mathbb{R}$.

⟦ <u>Because:</u>

$\because \gamma(t)$ is a continuous function from $[a,b]$ to $\mathbb{C}$,
$\therefore \gamma(t)-c$ is also a continuous function from $[a,b]$ to $\mathbb{C}$.
Also, modulus is a continuous function from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{R}$.
$|\gamma(t)-c|$ is the composition of these continuous functions, and hence is continuous.

⟧

By property of real-valued continuous functions on closed bounded intervals, we know that $|\gamma(t)-c|$ attains maximum (M, say) over $[a,b]$.

অর্থাৎ, আমরা C বরাবর হাঁটতে হাঁটতে দেখছি কখন c থেকে সবচেয়ে দূরে থাকি। সেই দূরত্বটাকেই M নাম দিয়েছি (Fig 9)। এই M-এর চেয়ে সামান্য বড় কোনো r নিলেই চলবে। অবশ্য পুরো ব্যাপারটা হচ্ছে $N(c,R)$-এর মধ্যে, তাই $r<R$-ও হতে হবে।

Any $r\in(M,R)$ will work.

তাহলে দেখা গেল যে, C-টাকে কোনো একটা $N(c,r)$-এর মধ্যে ঢুকিয়ে ফেলা যাচ্ছে। এইবার তবে uniform convergence লাগানো যাবে।

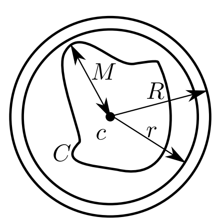
<u>Step 2</u>: Let $S_n(z)=\sum_0^n a_k(z-c)^k$.
Then, by a standard result, $S_n(z)\to f(z)$ uniformly for $z\in N(c,r)$.

এবার আমরা আগের theorem-টা লাগাব--

Hence, by standard result, $\int_C S_n(z)dz\to\int_C f(z)dz$. So

$$\int_C f(z)dz=\int_C \lim_n S_n(z)dz=\lim_n\int_C S_n(z)dz=\lim_n\sum_0^n\int_C a_k(z-c)^k dz=\sum_0^\infty\int_C a_k(z-c)^k dz,$$

<u>Fig 9</u>



> as required.

[Q.E.D]

32.2 Taylor expansion

আমরা এই অধ্যায়ের গোড়াতেই বলেছি যে, কোনো $f(z)$ যদি কোনো $N(c, R)$-এর উপর সর্বত্র differentiable হয়, তবে সেই $f(z)$-কে একটা power series আকারে লেখা যায়, যার centre হল c আর যার radius of convergence অন্ততঃ R হবে। সেই power series-টার চেহারা হবে $a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots$, যেখানে

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

মানে power series-টা আসলে $f(z)$-এর Taylor series.
এসবই আগে বলেছি, কিন্তু প্রমাণ করি নি। এবার প্রমাণ করব।

Taylor expansion

Let $f(z)$ be a function that is differentiable on some $N(c, R)$. Then $f(z)$ may be expressed as the following power series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n, \quad z \in N(c, R),$$

where

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

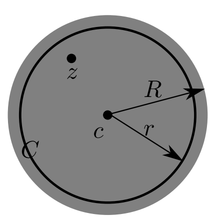
This power series has radius of convergence at least R.

Proof:

> Fix any $z \in N(c, R)$. Also fix any $r \in (|z-c|, R)$. Let $C = \text{circle}(c, r)$.

মানে সোজা কথা, $N(c, R)$-এর মধ্যে এমনভাবে একটা গোল আঁকলাম c-কে কেন্দ্র করে যাতে z-টা সেই গোলের ভিতরে থাকে (Fig 10)।

Fig 10



By Cauchy integral formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw. \qquad (*)$$

এবার আসল কৌশলটা আসছে। আমরা জানি $|\alpha| < 1$ হলে $\frac{1}{1-\alpha}$-কে $1+\alpha+\alpha^2+\cdots$ আকারে লেখা যায়। আমরা সেটা ব্যবহার করে $\frac{1}{w-z}$-কে power series-এর মত করে লিখব।

Now

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-c+c-z} = \frac{1}{(w-c)\left(1-\frac{z-c}{w-c}\right)} = \frac{1}{w-c}\times\frac{1}{1-\alpha},$$

where $\alpha = \frac{z-c}{w-c}$.

লক্ষ কর, এখানে $w-c$-টা কখনও 0 হয়ে যাওয়ার ভয় নেই, কারণ w থাকবে $C = \text{circle}(c, r)$-এর উপরে।

Now $|\alpha| < 1$,

⟦ Because:

$\because z$ is inside C hence $|z-c| < r = |w-c|$.

⟧

So

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1+\alpha+\alpha^2+\cdots.$$

Thus

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-c}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}.$$

এবার এই জিনিসটা ব্যবহার করব integral-টার মধ্যে--

So from (*)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}(z-c)^n dw.$$

এবার integral-টাকে sum-এর মধ্যে ঢোকাতে পারলেই হয়! তার জন্য হাতিয়ার হল uniform convergence. এবং uniform convergence দেখানোর জন্য অমোঘ অস্ত্র Weierstrass' M-test.

Now $f(w)$ is bounded on $\text{circle}(c, r)$.

> ⟦ Because:
>
> Here circle(c, r) is given by $\gamma(t) = c + re^{it}$, $\quad t \in [0, 2\pi]$.
> So $|f(w)| = |f(c + re^{it})|$, which is a composition of continuous functions, and hence is continuous on the closed bounded interval $[0, 2\pi]$.
> So by standard result, $|f(w)|$ is bounded, and hence $f(w)$ is bounded for $w \in C$.
>
> ⟧
>
> Let B be a bound for $f(z)$ on C.
>
> So, for $w \in C$, we have $\left|\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}(z-c)^n\right| \leq B \times \frac{|z-c|^n}{r^{n+1}} = \frac{B}{r} \times \left|\frac{z-c}{r}\right|^n = M_n$, say.

Weierstrass' M-test লাগানোর জন্য এবার দেখাতে হবে $\sum M_n < \infty$.

> Since $\left|\frac{z-c}{r}\right| < 1$, hence $\sum M_n < \infty$.
>
> So, by Weierstrass' M-test, we have uniform convergence.
>
> Hence by standard result, term-by-term integration may be done.
>
> Thus,
>
> $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}dw \times (z-c)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n,$$
>
> by Cauchy integral formula for derivatives, as required.

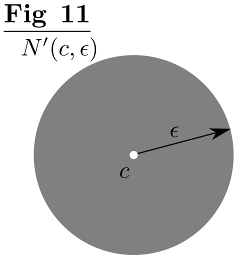
[Q.E.D]

32.3 Zeros of analytic functions

ধরো একটা analytic function দেওয়া আছে $f(z)$, যেটা সর্বত্র শূন্য নয়। আমরা এই অধ্যায়ের গোড়াতেই বলেছিলাম যে, যদি কোনো $z = z_0$-এ $f(z) = 0$ হয়, তবে z_0-কে ঘিরে এমন একটা neighbourhood পাবে $N(z_0, \epsilon)$ যার মধ্যে z_0 বাদে বাকি সর্বত্রই $f(z) \neq 0$ হতে বাধ্য। ছবি দিয়ে বলেছিলাম এইভাবে--

> $f(z)$-এর zero-গুলো, মানে z-এর যেসব value-র জন্য $f(z) = 0$ হয়, তারা সবাই একটু ফাঁক ফাঁক হয়ে থাকবে, এইরকম , কিন্তু মোটেই এইরকম

Fig 11



খুব ঘন ঘন গায় গায় লেগে থাকবে না।

অংকের ভাষায়--

THEOREM

Let $D \subseteq \mathbb{C}$ be nonempty and open. Let $f : D \to \mathbb{Z}$ be any nonzero analytic function. Let $f(c) = 0$ for some $c \in D$. Then $\exists \epsilon > 0 \quad \forall z \in N'(c, \epsilon) \quad f(z) \neq 0$.

এখানে একটা notation একটু মনে করিয়ে দিই, $N'(c, \epsilon)$ মানে হল $N(c, \epsilon)$ থেকে c বিন্দুটা বাদ, অর্থাৎ এমন একটা একটা চাকতি, যার ঠিক মাঝখানটায় একটা ফুটো (Fig 11)। একে বলে একটা deleted neighbourhood.

Proof:

Shall show

$\exists \epsilon > 0 \quad \forall z \in N'(c, \epsilon) \quad f(z) \neq 0.$

Since $f(z)$ is analytic at $z = c$, hence it can be written as

$$f(z) = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \cdots$$

for some $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{C}$.

Since $f(c) = 0$, hence $a_0 = 0$. Also since f is nonzero, hence not all a_n's are zero.

Let $k \in \mathbb{N}$ be the smallest integer such that $a_k \neq 0$.

তাহলে power series-টাকে আমরা k-th term থেকেই শুরু করতে পারি--

Then

$$f(z) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j (z - c)^j = (z - c)^k \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} a_j (z - c)^{j-k}}_{g(z),\text{ say}}.$$

Clearly, $g(z)$ is an analytic function and $g(c) = a_k \neq 0$.

কেন $g(z)$-টা analytic হচ্ছে, বুঝলে তো? Analytic মানে হল যাকে power series আকারে লেখা যায়। আমরা যেভাবে $g(z)$-কে define করলাম, সেটা তো power series আকারেই আছে! সুতরাং analytic না হয়ে যায় কোথায়?

Now $\exists \epsilon > 0 \quad \forall z \in N(c, \epsilon) \quad g(z) \neq 0.$

এর কারণটা জটিল কিছু নয়। যেহেতু $g(z)$-টা analytic, তাই continuous-ও বটে। আবার যেহেতু $g(c) \neq 0$, তাই c-কে ঘিরে খানিকটা দূর পর্যন্ত $g(z) \neq 0$ হতে হবে। কেন এমন হবে, সেটা যদি না বোঝা যায়, তাই সংক্ষেপে প্রমাণ করে দেওয়াই ভালো--

⟦ Because:

Let $\delta = |g(c)|/2 > 0$.
By continuity of $g(z)$ at $z = c$, we have
$\exists \epsilon > 0 \quad \forall z \in N(c, \epsilon) \quad |g(z) - g(c)| < \delta$.
আমরা জানি 0-র থেকে $g(c)$-র দূরত্ব হল $|g(c)|$. এদিকে $g(z)$ রয়েছে $g(c)$-র থেকে δ দূরত্বের মধ্যে, মানে $\frac{g(c)}{2}$-এর চেয়েও কম দূরত্বে। তাই $g(z)$ কোনোভাবেই 0 হতে পারে না।
But $|g(z) - g(c)| < \delta \implies |g(z)| > |g(c)|/2 > 0 \implies g(z) \neq 0$.

⟧

$\exists\epsilon$ Choose this $\epsilon > 0$.

$\forall z$ Take any $z \in N'(c, \epsilon)$.

Then $f(z) = (z - c)^k g(z) \neq 0$, as required.

[Q.E.D]

এই theorem-টাকে নানাভাবে লেখা যায়। যেমন ধরো এইভাবে--

THEOREM

The zeros of a nonzero analytic function must be isolated.

এই চেহারাটার সুবিধা হল এটা খুব সংক্ষিপ্ত, তাই ব্যবহার করার সময়ে সুবিধা। এখানে **isolated** বলে একটা শব্দ আছে। এর মানে হল আমরা যাকে ফাঁক ফাঁক বলছিলাম সেটাই। অংকের ভাষায় বলতে গেলে এইরকম-- ধরো একটা $S \subseteq \mathbb{C}$ আছে। তার একটা সদস্য $z \in \S$-কে isolated বলব যদি z থাকে S-এর বাকি সদস্যদের থেকে একটু দূরে, মানে এমন একটা $\epsilon > 0$ যদি পাওয়া যায়, যাতে $N(z, \epsilon)$-এর ভিতরে z ছাড়া S-এর আর কোনো সদস্য না থাকে। এটাকে deleted neighbourhood ব্যবহার করে বলতে পারি, $N'(z, \epsilon) \cap S = \phi$.

DEFINITION: **Isolated**

Let $S \subseteq \mathbb{C}$. Let $z \in S$. We call z an **isolated** point of S if $\exists \epsilon > 0 \quad N'(z, \epsilon) \cap S = \phi$.

এইবার একই theorem-এর আরেকটা রূপ দ্যাখো--

THEOREM

Let $D \subseteq \mathbb{C}$ be nonempty and open. $f : D \to \mathbb{Z}$ be any analytic function. Let $Z(f) = \{z \in D \ : \ f(z) = 0\}$. If $Z(f)$ has a limit point inside D, then f must be identically zero over D.

Proof: প্রথমে বুঝে নাও যে, এটা কেন আগের theorem-টারই রূপান্তর। আগের theorem-টা $f(z)$-এর উপর দুটো শর্ত চাপিয়েছিল--এক, analytic এবং দুই, সর্বত্র শূন্য নয়। এর ভিত্তিতে সিদ্ধান্ত ছিল যে, $f(z)$-এর zero-গুলো ফাঁক ফাঁক হয়ে থাকবে। সুতরাং যদি দ্যাখো যে, কোনো $f(z)$-এর zero-গুলো গায় গায় গাদাগাদি করে আছে (অংকের ভাষায়, ওদের একটা limit point আছে D-এর মধ্যে), তবে দুটো শর্তের অন্ততঃ একটা নিশ্চয়ই ভেঙেছে। এখানে বলা আছে $f(z)$-টা analytic. তার মানে প্রথম শর্তটা এখনও বহাল আছে। তাহলে দ্বিতীয় শর্তটাই নিশ্চয়ই ভেঙেছে, মানে f-টা সর্বত্রই শূন্য হতে বাধ্য!

> We know that the zeros of a nonzero analytic function are isolated.
>
> Since here $f(z)$ is an analytic function whose zeros are not isolated (since they have a limit point inside D), hence $f(z)$ must be identically zero, as required.

[Q.E.D]

ওই একই theorem-এর আরো একটা রূপ হতে পারে এইরকম--

THEOREM

Let $D \subseteq \mathbb{C}$ be nonempty and open. Also $f, g : D \to \mathbb{C}$ be any two analytic functions. Let $S = \{z \in D \ : \ f(z) = g(z)\}$. If S has a limit point inside D, then $f \equiv g$ over D.

এটা আর প্রমাণ করে দেব না। নিজে নিজে করো দেখি!
এবার কয়েকটা অংক দেখি এই ধারণার ভিত্তিতে।

Example 13: ধরো $f(z)$ একটা entire function, যার জন্য বলা আছে যে, $\forall n \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{i}{n^2}$. বলতে পারো $f(z)$ কী হবে?

SOLUTION: $z = \frac{1}{n}$ থেকে $f(z) = \frac{i}{n^2}$ পাওয়ার একটা কায়দা সহজেই চোখে পড়ে, $f(z) = iz^2$. অবশ্য এটুকুর ভিত্তিতেই বলা যাচ্ছে না যে, $f(z) = iz^2$ হতেই হবে। এই iz^2-কে একটা নাম দিয়ে নিই, ধরো $g(z) = iz^2$. তাহলে $g(z)$-ও একটা entire function. লক্ষ করো f আর g এই set-টার উপরে সমান--

$$\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

এই set-টার একটা limit point আছে 0. তাই আমাদের theorem-টা বলছে $f \equiv g$ হতে বাধ্য। তার মানে $f(z) = iz^2$. ব্যস্, সেটাই উত্তর। ■

Exercise 12: Let $f(z)$ be an entire function such that for all z with $|z| = 1$ we have $|f(z)| = 2$ and $\text{Arg}(f(z)/z) = \frac{\pi}{10}$. Find $f(2+3i)$.

HINT:

অংকটা দেখে খুবই বিদ্ঘুটে লাগতে পারে। লক্ষ করো $|z| = 1$ হলে যা যা শর্ত দেওয়া হয়েছে তা থেকে অনায়াসেই তুমি $f(z)$ বার করে ফেলতে পারবে (কারণ modulus আর Arg দুটোই বলে দিয়েছে)। এবার $f(z)$-এর একটা ভদ্রসভ্য চেহারা আন্দাজ করো এবং দেখাও যে $f(z)$-এর চেহারা সেটাই হতে বাধ্য।

■

Answers

1. না। **2.** অসম্ভব! কারণ $z = c$ বসালে power series-টা হয়ে যায় $a_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$, যেটা দেখাই যাচ্ছে a_0-তে converge করে। **3.** 0. **4.** ∞. **5.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^i}{n!}(z-i)^n$, যেখানে $z \in \mathbb{C}$.
6. $z^3 = (i + z - i)^3 = i^3 + 3i^2(z-i) + 3i(z-i)^3 + (z-i)^3$. **7.** $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + - + \cdots$ আর $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + - + \cdots$. দুইক্ষেত্রেই $z \in \mathbb{C}$. **8.** $\frac{1}{1-z}$-টা $\mathbb{C}$-এর সর্বত্রই differentiable, খালি $z = 1$ বাদে, যেখানে ওটা defined-ই নয়। এদিকে i থেকে 1-এর দূরত্ব হল $|1-i| = \sqrt{2}$. সুতরাং $N(i, \sqrt{2})$-এর উপরে $\frac{1}{1-z}$ হল differentiable. সুতরাং power series আকারে লেখা সম্ভব, যার radius of convergence হবে $\sqrt{2}$. **9.** না হয়ে যাবেটা কোথায়! **10.** এখানে $|z_n|$-রা সবাই nonnegative, real. সুতরাং real analysis-এর root test লাগিয়ে পাচ্ছি, $\sum |z_n| < \infty$. সুতরাং absolute convergence হয়ে গেল। আর absolute convergence হলে তো convergence হবেই! **11.** $\sum z_n$ যদি converge করত, তবে $z_n \to 0$ হত। এখানে তা হচ্ছে না, তাই contradiction. **12.** $f(z) = 2e^{\frac{i\pi}{10}} z$, তাই $f(2+3i) = e^{\frac{i\pi}{10}}(4+6i)$.

Index